9. gyakorlat megoldásai
Konvexitás, aszimptoták és L'Hospital-szabály

F1. Adjuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken az f függvény konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

(a) $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$.

M1. Ha a függvény második deriváltja pozitív, akkor a függvény konvex, ha negatív, akkor konkáv. Ahol a második derivált előjelet vált (és így 0), ott van inflexiós pont.

(a) A függvény deriváltjai:

$$f'(x) = 6x^2 - 42x + 36,$$
$$f''(x) = 12x - 42.$$

A második derivált $x = \frac{42}{12} = \frac{7}{2}$ esetén 0, ennél kisebb x-ekre negatív, nagyobbakra pozitív. Így a függvény a $(-\infty, \frac{7}{2})$ intervallumban konkáv, a $(\frac{7}{2}, +\infty)$ intervallumban konvex, és az $x = \frac{7}{2}$ inflexiós pont.

(b) Először kiszámítjuk a deriváltakat:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1) - x^3 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{3x^3 - 3x^2 - x^3}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2},$$
$$f''(x) = \frac{(6x^2-6x)(x-1)^2 - (2x^3-3x^2)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(6x^2-6x)(x-1) - (2x^3-3x^2)\cdot 2}{(x-1)^3} =$$
$$= \frac{6x^3 - 6x^2 - 6x^2 + 6x - 4x^3 + 6x^2}{(x-1)^3} = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x}{(x-1)^3} = \frac{2x(x^2-3x+3)}{(x-1)^3}.$$

Az $x^2 - 3x + 3 = 0$ egyenletnek nincs valós megoldása (mivel a diszkrimáns negatív), így ez a másodfokú polinom mindenütt pozitív (főegyüttható pozitív). Ez alapján:

	$x<0$	$x=0$	$0<x<1$	$x=1$	$1<x$
f''	$+$	0	$-$	n.é.	$+$
f	konvex	i.p.	konkáv	n.é.	konvex

Tehát a függvény a $(-\infty, 0)$ intervallumban konvex, a $(0,1)$ intervallumban konkáv, és az $(1, +\infty)$ intervallumban megint konvex. Az $x = 0$ az egyetlen inflexiós pont.

F2. Van-e az f függvénynek aszimptotája $(+\infty)$-ben, illetve $(-\infty)$-ben? Ha igen, akkor határozzuk meg:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2+9}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$,

(b) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x \quad (x \in \mathbb{R})$,

(c) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(d) $f(x) = \sqrt{4x^2+3x+1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

M2. Ha a függvénynek a végtelenben véges a határértéke, akkor vizszintes aszimptotája van, míg ha a határérték végtelen, akkor ferde aszimptotája lehet (de nem biztos, hogy van). A ferde aszimptota $y = ax + b$ egyenletében szereplő a és b értékét a következő határértékek segítségvel számolhatjuk ki:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x},$$
$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax).$$

(a) Mivel $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+9}{x} = \lim_{x\to\infty} x + \dfrac{9}{x} = \infty$, így lehet ferde aszimptota:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+9}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+9}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{9}{x^2} = 1,$$
$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+9}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+9-x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{9}{x} = 0.$$

Így a $+\infty$-ben a ferde aszimptota egyenlete: $y = 1x + 0$, azaz $y = x$.
Hasonló számolással kapjuk, hogy ugyanez az aszimptota egyenlete a $-\infty$-ben.

(b) Mivel $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^3 - x^2 - 2x = \lim_{x\to\infty} x^3\left(1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right) = \infty$, így lehetne ferde aszimptota, de

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-x^2-2x}{x} = \lim_{x\to\infty} x^2 - x - 2 = \lim_{x\to\infty} x^2\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) = \infty$$

miatt nincs ferde aszimptota a $(+\infty)$-ben.
Hasonló számolással kapjuk, hogy a $(-\infty)$-ben sincsen.

(c) A függvény határértéke:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x+1}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 2,$$

így ebben az esetben vízszintes aszimptota van, az $y = 2$ egyenes.
Hasonló számolással kapjuk, hogy $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$, így a $(-\infty)$-ben is az $y = 2$ egyenes az aszimptota.

(d) Mivel $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, így itt is ferde aszimptotát keresünk:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+3x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{4} = 2,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x)-ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2+3x+1}-2x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2+3x+1}-2x\right) \frac{\sqrt{4x^2+3x+1}+2x}{\sqrt{4x^2+3x+1}+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+3x+1-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+3x+1}+2x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{4x^2+3x+1}+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+2} = \frac{3}{\sqrt{4}+2} = \frac{3}{4},$$

így a ferde aszimptota egyenlete: $y = 2x + \frac{3}{4}$ a $(+\infty)$-ben.

A $(-\infty)$-ben hasonlóan számolhatunk, ám vigyázni kell ekkor, hogy az x negatív, ezért a számolásban bizonyos előjelek megfordulnak, így az aszimptotára az $y = -2x - \frac{3}{4}$ egyenletet kapjuk.

F3. A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsuk ki az alábbi határértékeket. Azt is állapítsuk meg, hogy milyen típusú ,,kritikus" határértékről van szó.

(a) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sin(2x-4)}{\operatorname{tg}(x-2)}$,

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{3x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x-\sin x}$,

(d) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

M3. (a) Mivel $\lim\limits_{x\to2} \sin(2x-4) = \lim\limits_{x\to2} \operatorname{tg}(x-2) = 0$, így alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to2} \frac{(\sin(2x-4))'}{(\operatorname{tg}(x-2))'} = \lim_{x\to2} \frac{(\cos(2x-4))\cdot 2}{\frac{1}{\cos^2(x-2)}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Ez azt jelenti, hogy $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(2x-4)}{\operatorname{tg}(x-2)}=2.$

(b) Most $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(x)=\lim\limits_{x\to\infty}3x=\infty$, ebben az esetben is alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(x))'}{(3x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x}=0,$$

így $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x)}{3x}=0.$

(c) Itt $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg}x-x)=\lim\limits_{x\to 0}(x-\sin x)=0$, tehát L'Hospital-hatunk:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{tg}x-x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x},$$

azonban ez is „$\frac{0}{0}$" alakú, így ismét alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-2(\cos x)^{-3}(-\sin x)}{-(-\sin x)}=\lim_{x\to 0}2(\cos x)^{-3}=2.$$

Tehát $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}=2.$

(d) Mivel itt nem egy tört határértékét kell kiszámolnunk, ezért előbb közös nevezőre hozással törtté alakítjuk a kifejezést:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$$

Mivel ekkor a számláló és a nevező is 0-hoz tart, így alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{(x(e^x-1))'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x},$$

ami még mindig „$\frac{0}{0}$" alakú, így ismét alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(e^x-1+xe^x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+(e^x+xe^x)}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Tehát $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\dfrac{1}{2}.$