3. vizsga

1. Mikor nevezünk egy függvényt periódikusnak? (3 pont)

2. Definiáljuk azt a fogalmat, melyre a $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = A$ jelölést ($A \in \mathbb{R}$) használjuk. (3 pont)

3. Mondjuk ki a Weierstrass-tételt! (3 pont)

4. Egészítsük ki a következő definíciót! (3 pont)
   Egy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) ____________, ha létezik $K \in \mathbb{R}$ valós szám, hogy $f(x) \leq K$ minden $x \in D_f$ esetén.

5. Melyik a helyes befejezés? (3 pont)
   Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $I \subseteq D_f$ intervallumon konvex, ha minden $x, x_0 \in I$ esetén
   (a) $f(x_0) \leq f(x) + f'(x_0)(x - x_0)$.
   (b) $f(x_0) \geq f(x) + f'(x_0)(x - x_0)$.
   (c) $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
   (d) $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

6. Adjuk meg az $\mathbb{R}$ lehető legbővebb részhalmazát, ahol az $f(x) = \dfrac{\sqrt{3 - x^2}}{\ln(6x - 3)}$ függvény értelmezhető! (7 pont)

7. Kati kertészetében fenyőfákat nevelnek, egyszerre 50 facsemete fér el a kertészetben. Ahhoz, hogy egy fa x méteresre megnőjön, $4 + x^2$ évre van szükség. Karácsonykor a fákat méterenként 6 petákért tudják eladni. Ilyen feltételek mellett mekkora fákat érdemes nevelniük, hogy az egy évre jutó bevételük maximális legyen? (7 pont)

8. Végezzük el az $f(x) = xe^{-3x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát (értelmezési tartomány, zérushely, paritás, periodicitás, határértékek, aszimptoták, monotonitás, lokális szélsőértékek, konvexitás, ábrázolás, értékkészlet). (12 pont)

9. Melyik az az $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $f''(x) = \frac{1}{x^2}$, továbbá $f(1) = 2$ és $f'(2) = 1$ teljesül? (6 pont)

10. (6 pont)
$$\int_0^1 xe^{-3x} \, \mathrm{d}x = \, ?$$

11. Számítsuk ki az $f(x) = x^3, x \in [0, 2]$ függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával adódó forgásfelület palástjának felszínét. (7 pont)