4. vizsga végeredményei

4. lokális minimuma

5. (d)

6. AB egyenes: $y = 0$, felette levő pontok: $y > 0$.
AC egyenes: $y = \frac{1}{3}x$, alatta levő pontok: $y < \frac{1}{3}x$.
BC egyenes: $y = -x + 4$, alatta levő pontok: $y < -x + 4$.
Tehát az egyenlőtlenségrendszer: $y > 0; y < \frac{1}{3}x; y < -x + 4$.

7. A függvény: $f(x) = (31 + 17 - x^2)x = 48x - x^3$, melynek deriváltja:
$f'(x) = 48 - 3x^2$, mely $x = \pm 4$-ben tűnik el, amik közül csak az $x = 4$ értelmes.
Ez maximum, hiszen $f''(x) = -6x$ negatív $x = 4$-ben.

8. ÉT: $\mathbb{R}$, zérushely: $x = 0$ (itt eltűnik, és monoton), páratlan, periódus nincsen.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, és itt a ferde aszimptota $y = -2x - \frac{\pi}{2}$.
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, és itt a ferde aszimptota $y = -2x + \frac{\pi}{2}$.
$f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2} - 2 < 0$, így végig monoton csökken.
$f''(x) = \dfrac{-2x}{(1 + x^2)^2}$, így 0-ig konvex, utána konkáv.
ÉK: $\mathbb{R}$.

9. $f(x) = -\dfrac{\cos(3x)}{3} - \dfrac{e^{2x}}{2} + C$, ahol $C = \frac{17}{6}$. Így $f(x) = -\dfrac{\cos(3x)}{3} - \dfrac{e^{2x}}{2} + \dfrac{17}{6}$.

10. Parciális integrálással:
$$\int x^3 \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^3}{4} \,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C$$

11. A forgásfelület palástfelszíne:
$$2\pi \int_1^3 (9-2x)\sqrt{1 + (-2)^2} \,\mathrm{d}x = 2\pi\sqrt{5}[9x-x^2]_1^3 = 2\pi\sqrt{5}(18-8) = 20\sqrt{5}\pi \approx 140,5.$$