5. vizsga

1. Mikor nevezünk egy függvényt invertálhatónak? (3 pont)

2. Definiáljuk azt a fogalmat, melyre a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ jelölést használjuk. (3 pont)

3. Mondjuk ki a Bolzano-tételt! (3 pont)

4. Egészítsük ki a következő definíciót! (3 pont)
   Egy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) ______________, ha $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in D_f$) esetén $f(x_1) > f(x_2)$.

5. Melyik a helyes befejezés? (3 pont)
   Egy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) derivált függvénye az a függvény, mely minden $x \in D_f$ ponthoz hozzárendeli a
   (a) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ határértéket.
   (b) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x_0 - x}$ határértéket.
   (c) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ határértéket.
   (d) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ határértéket.

6. Keressük meg a szakadási helyeket, és azok fajtáit! (6 pont)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, \\ 2, & \text{ha } x = 3. \end{cases}$$

7. Katinak a vizsgái között van másfél óra szabadideje, és ebben szánkózni megy a közeli dombra. Ha egy csúszáshoz x métert megy felfelé a dombon, akkor a forduló $9 + x^2$ percig tart. Mivel nagyon mély a hó, a lejtő alján azonnal megáll a szánkó. Meddig menjen fel a dombra, hogy a lehető legtöbb métert tudjon szánkózni összesen? (7 pont)

8. Végezzük el az $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$ függvény teljes függvényvizsgálatát (értelmezési tartomány, zérushely, paritás, periodicitás, határértékek, aszimptoták, monotonitás, lokális szélsőértékek, konvexitás, ábrázolás, értékkészlet). (12 pont)

9. (6 pont)
$$\int_3^{18} \frac{3}{\sqrt[4]{x-2}}\,\mathrm{d}x = ?$$

10. (7 pont)
$$\int x^2 e^{3x}\,\mathrm{d}x = ?$$

11. Határozzuk meg az $y = e^x$ görbe, $x = 3$ egyenes és az $y = 1 - \frac{x}{3}$ egyenes által határolt (korlátos) síkidom területet. (7 pont)