5. vizsga végeredményei

4. szigorúan monoton csökkenő

5. (c)

6. Ha $x \neq 3$, akkor folytonos. Az $x = 3$-ban a határérték gyöktelenítéssel:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} =$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4} = \lim_{x\to 3}(\sqrt{x+1}+2) = 4,$$

ami nem egyezik a függvény értékével, tehát ez megszüntethető szakadási hely.

7. A függvény: $f(x) = \frac{90}{9+x^2}x = \frac{90x}{9+x^2}$, melynek deriváltja:
$f'(x) = \frac{90(9+x^2) - 90x\cdot 2x}{(9+x^2)^2} = \frac{90(9-x^2)}{(9+x^2)^2}$, mely $x = \pm 3$-ban tűnik el, amik közül csak az $x = 3$ értelmes. Ez maximum, hiszen a derivált előtte pozitív, utána negatív.

8. ÉT: $\mathbb{R}$, zérushely: $x = 0$ és $x = 3$, paritás, periódus nincsen.
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$, és itt nincs ferde aszimptota.
$\lim_{x\to \infty} f(x) = -\infty$, és itt nincs ferde aszimptota.
$f'(x) = -3x^2+12x-9$, melynek gyökei $1, 3$, köztük monoton nő, másutt csökken.
$f''(x) = -6x+12$ így 2-ig konvex, utána konkáv.
ÉK: $\mathbb{R}$.

9.
$$\int_3^{18} \frac{3}{\sqrt[4]{x-2}}\,\mathrm{d}x = \int_3^{18} 3(x-2)^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x = \left[3\frac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{4}}\right]_3^{18} = 28.$$

10. Parciális integrálással:

$$\int x^2e^{3x}\,\mathrm{d}x = x^2\frac{e^{3x}}{3} - \int 2x\frac{e^{3x}}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\left(x\frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9}\right) + C =$$
$$= \frac{x^2e^{3x}}{3} - \frac{2xe^{3x}}{9} + \frac{2e^{3x}}{27} + C.$$

11. Az $y = e^x$ és az $y = 1 - \frac{x}{3}$ egyenes $x = 0$ metszi egymást, így a kettő különbségét $x = 0$-tól $x = 3$-ig integráljuk:

$$\int_0^3 e^x - \left(1 - \frac{x}{3}\right)\,\mathrm{d}x = \left[e^x - x + \frac{x^2}{6}\right]_0^3 = e^3 - \frac{5}{2} \approx 17,6.$$