1. feladatsor megoldása

1. (a) A végtelenig való integrálást határértékként írjuk fel:

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{(1-x)^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_3^b (1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{(1-x)^{-2}}{-2}\right]_3^b = \lim_{b\to\infty}\frac{(1-b)^{-2}}{2} - \frac{(1-3)^{-2}}{2} = -\frac{1}{8}.$$

(b) Először az integrált számoljuk ki parciális törtekre bontással. Mivel $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$, így

$$\frac{6}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

alakba szeretnénk átírni, ahol az A, B együtthatókat beszorzás után kapott egyenletrendszerből kapjuk:

$$6 = A(x+2) + B(x-1)$$
$$6 = (A+B)x + 2A - B,$$

amiből $A+B=0$, és $2A-B=6$. Ebből $A=2, B=-2$, és így

$$\int \frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+2}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x-1| - 2\ln|x+2| + C = 2\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C.$$

Ezzel a feladat improprius integrálja:

$$\int_2^{+\infty}\frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[2\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right]_2^b = \lim_{b\to\infty} 2\ln\left|\frac{b-1}{b+2}\right| - 2\ln\left|\frac{2-1}{2+2}\right| =$$
$$= -2\ln\left(\frac{1}{4}\right) = 4\ln 2 \approx 2,77,$$

mert

$$\lim_{b\to\infty}\frac{b-1}{b+2} = \lim_{b\to\infty}\frac{1-\frac{1}{b}}{1+\frac{2}{b}} = 1.$$

(c) Először az integrált számoljuk ki parciális integrálással:

$$\int xe^{-2x}\,\mathrm{d}x = x\frac{e^{-2x}}{-2} - \int\frac{e^{-2x}}{-2}\,\mathrm{d}x = -\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C.$$

Ezzel az improprius integrál:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4}\right]_0^b =$$
$$= \lim_{b\to\infty} -\frac{be^{-2b}}{2} - \frac{e^{-2b}}{4} - \left(-\frac{0e^{-2\cdot 0}}{2} - \frac{e^{-2\cdot 0}}{4}\right) = \frac{1}{4},$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{2x}} \rightsquigarrow \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{2x}\cdot 2} = 0$$

a L'Hospital-szabály alkalmazásával.

2. (a) A függvény 1-ben „száll el”, így azt kell „óvatosan”, azaz határértékkel megközelíteni:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to 1-}\int_0^b (x-1)^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to 1-}\left[\frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right]_0^b = \lim_{b\to 1-} 3(b-1)^{\frac{1}{3}} - 3\cdot(0-1)^{\frac{1}{3}} = 3.$$

(b) Itt a -2-ben van „probléma”:

$$\int\limits_{-2}^{0} \frac{6}{\sqrt{4+2x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to -2+} \int\limits_{a}^{0} 6(4+2x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to -2+} \left[\frac{6(4+2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}\right]_a^0 =$$

$$= \lim_{a\to -2+} 6(4+2a)^{\frac{1}{2}} - 6(4+2\cdot 0)^{\frac{1}{2}} = 12.$$

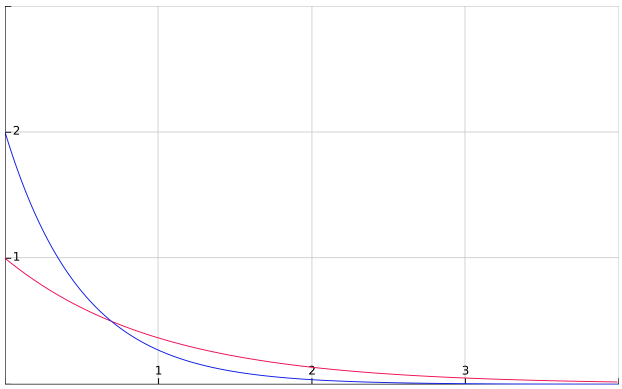
(c) Először integrálunk, melyhez visszavezetjük arra, amit tudunk (majd lineáris helyettesítés):

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

Ezzel az impropius integrál (a függvény a 2-ben tart a végtelenhez):

$$\int\limits_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to 2-} \int\limits_{0}^{b} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to 2-} \left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^b = \lim_{b\to 2-} \arcsin\left(\frac{b}{2}\right) - \arcsin\left(\frac{0}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

3. Deriválással kapjuk, hogy pozitív λ esetén f_λ konkáv. Továbbá igaz, hogy $f_\lambda(0) = \lambda$, és $\lim_{x\to\infty} f_\lambda = 0$. Ezek alapján ábrázolhatjuk a függvényeket még azt is felhasználva, hogy nagyobb λ esetén f_λ gyorsabban tart a 0-hoz.



Az impropius integrál:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} f_\lambda(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{0}^{b} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} -e^{-\lambda b} - \left(-e^{-\lambda 0}\right) = 1.$$

5. Végeredmények:

(a) $\frac{1}{6} \approx 0,167$; (b) $\frac{e^{-10}}{5} \approx 9,08\cdot 10^{-6}$; (c) $\frac{3}{2} = 1,5$.