1. vizsga megoldásvázlata

5. (c)

6. A sík egyenlete: $3x + y - z = 1$. A Q pont távolsága:

$$\left|\frac{3x + y - z - 1}{\sqrt{11}}\right| = \left|\frac{-11}{\sqrt{11}}\right| = \sqrt{11} \approx 3{,}32$$

7. $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3a \\ 12 \end{bmatrix}$, amiből $\lambda_1 = 4$, és így $a = 2$. A 4-hez tartozó többi sajátvektor $\left\{ \begin{bmatrix} 2x \\ 3x \end{bmatrix} \,\middle|\, x \neq 0 \right\}$.
$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_2) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$, amiből a másik sajátérték: $\lambda_2 = -1$, melyhez tartozó sajátvektorok: $\left\{ \begin{bmatrix} -x \\ x \end{bmatrix} \,\middle|\, x \neq 0 \right\}$.

8. $-8i = 8(\cos(270°) + i\sin(270°))$, amiből a harmadik gyökök:

$$2(\cos(90°) + i\sin(90°)) = 2i$$
$$2(\cos(210°) + i\sin(210°)) = -\sqrt{3} - i$$
$$2(\cos(330°) + i\sin(330°)) = \sqrt{3} - i$$

9.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^{n+1}}{(-3)^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} 7\left(\frac{7}{(-3)^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 7\left(\frac{7}{9}\right)^n = \frac{7}{1-\frac{7}{9}} = \frac{63}{2} = 31{,}5$$

10. Ha a, b, c jelöli az élek hosszúságait centiméterben ($a, b, c > 0$), akkor tudjuk, hogy $a+b+c = 30$, amiből $c = 30 - a - b$. A téglatest térfogata $abc = ab(30 - a - b)$, tehát az

$$f(a,b) = ab(30 - a - b) = 30ab - a^2b - ab^2$$

függvény maximumát keressük. A parciális deriváltak:
$f'_a(a,b) = 30b - 2ab - b^2 = b(30 - 2a - b)$
$f'_b(a,b) = 30a - a^2 - 2ab = a(30 - a - 2b)$
E két egyenletnek egyetlen nullhelye van a pozitív számok körében: $a = b = 10$, ekkor $c = 10$.
A második deriváltak:
$f''_{aa}(a,b) = -2b$
$f''_{ab}(a,b) = 30 - 2a - 2b$
$f''_{bb}(a,b) = -2a$,
amiből a Hesse-determináns:
$(-2b)(-2a) - (30 - 2a - 2b)^2 = 4ab - (30 - 2a - 2b)^2$, mely jelen esetben $400 - (-10)^2 = 300$, ami pozitív, tehát ez lokális szélsőérték. Mivel $f''_{aa}(10,10) = -20$ negatív, így lokális maximum. Tehát maximális térfogat esetén mindegyik él 10 cm.

11. Polárkoordinátákat használunk:
Az $x^2 + y^2 \leq 4$ feltételből $0 \leq r \leq 2$, míg a $0 \leq x \leq y$ feltétel azt adja, hogy $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, így az integrál:

$$\int_0^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4(r\cos\varphi)^2(r\sin\varphi)r \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4r^4\cos^2\varphi\sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^2 \left[-4r^4\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}r =$$

$$= \int_0^2 4r^4\frac{1}{3\cdot(\sqrt{2})^3}\,\mathrm{d}r = \left[\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{2} = \frac{32\sqrt{2}}{15} \approx 3{,}017$$