3. gyakorlat megoldásai
Lineáris összefüggőség. Mátrixok

F1. Döntsük el, hogy a következő $\mathbb{R}^3$-beli vektorok lineárisan függetlenek-e vagy nem:

$$\text{(a)}\quad \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}; \qquad \text{(b)}\quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

M1. A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha a $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ egyenlőségből következik, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$.
(a) A

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pontosan azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ -3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 0\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

A második egyenletből $\lambda_2 = \frac{3}{2}\lambda_1$, melyet a másik kettő egyenletbe írva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 - \frac{3}{2}\lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 - 3 \cdot \frac{3}{2}\lambda_1 - 3\lambda_3 &= 0, \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ -\frac{3}{2}\lambda_1 - 3\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

A második egyenlet az első (-3)-szorosa, tehát ez tulajdonképpen csak egy egyenlet. Ennek egy (nemnulla) megoldása például a $\lambda_1 = 2, \lambda_3 = -1$. Ekkor $\lambda_2 = \frac{3}{2}\lambda_1 = 3$. Ellenőrizhető, hogy ez az eredeti egyenletrendszer megoldása is, azaz

$$2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

mely mutatja, hogy ezen vektorok nem lineárisan függetlenek, azaz lineárisan összefüggőek.

(b) A

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

pontosan azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

A harmadik egyenletből az első egyenlet kétszeresét kivonva kapjuk, hogy $-\lambda_2 = 0$, azaz $\lambda_2 = 0$. Ekkor a második egyenletből $2\lambda_3 = 0$, azaz $\lambda_3 = 0$. Ekkor az első egyenletet felhasználva kapjuk, hogy $\lambda_1 = 0$. Tehát (1)-ből következik, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ami azt jelenti, hogy ezen vektorok lineárisan függetlenek.

F2. Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is!

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

M2. Az $m_1 \times k_1$-es és az $m_2 \times k_2$-as mátrixokat pontosan akkor tudjuk összeszorozni, ha $k_1 = m_2$. Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix 2×2-es, a $\mathbf{B}$ 3×2-es, a $\mathbf{C}$ 2×3-as, és a $\mathbf{D}$ 3×1-es, így az $\mathbf{AC}, \mathbf{BA}, \mathbf{BC}, \mathbf{CB}, \mathbf{CD}$ szorzatok értelmesek. Ezek eredménye:

$$\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 10 \\ -4 & -2 & -8 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 0 \\ -9 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{BC} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -10 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{CB} = \begin{bmatrix} -2 & 18 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{CD} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A mátrixok transzponáltjai:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

F3. Egy cég három gyárában négyféle terméket állít elő. Az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrix a_{ij} eleme jelentse az i-edik gyárban egy nap alatt előállított j-edik termék számát. A

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix}$$

vektor j-edik komponense a j-edik termék egységára. Mekkora az egy nap alatt előállított termelési érték gyáranként?

M3. Az első gyár termelési adtait az $\mathbf{A}$ mátrix első sora adja meg. Ezen adatokat kell beszorozni a megfelelő egységárral, majd ezeket összeadni, tehát az első gyár termelési értéke

$$4 \cdot 40 + 0 \cdot 60 + 5 \cdot 50 + 2 \cdot 20 = 450.$$

Hasonlóan a második gyáré:

$$2 \cdot 40 + 1 \cdot 60 + 3 \cdot 50 + 0 \cdot 20 = 290,$$

míg a harmadiké:

$$5 \cdot 40 + 6 \cdot 60 + 2 \cdot 50 + 4 \cdot 20 = 740.$$

Ezen számítások pontosan az $\mathbf{Ap}$ mátrixszorzat komponensei, így tulajdonképpen ezt kell kiszámolni:

$$\mathbf{Ap} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 450 \\ 290 \\ 740 \end{bmatrix}.$$

F4. Egy kereskedelmi cég n féle terméket forgalmaz m boltjában. Az $\mathbf{A}$ mátrix a_{ij} eleme jelentse a j-edik termék i-edik boltban egy hónap alatt forgalmazott mennyiségét. A $\mathbf{p}$ vektor p_i komponense jelölje az i-edik termék egységárát. Az $\mathbf{A}$ mátrix, a $\mathbf{p}$ vektor, az $\mathbf{e}_i$ (a kanonikus bázisvektor), valamint az $\mathbf{1}$ (az az oszlopvektor, amelynek minden koordinátája 1) vektorok segítségével írjuk fel:

(a) a havi bevételt boltonként;

(b) az r-edik bolt havi bevételét;

(c) az r-edik boltban a q-adik áruból eladott mennyiséget;

(d) az egy hónap alatt eladott termékmennyiséget termékenként;

(e) a havi összbevételt.

M4. (a) Az előző feladathoz hasonlóan $\mathbf{Ap}$, melynek a komponensei adják meg az egyes boltok bevételeit.

(b) Ha csak az r-edik bolt bevételére vagyunk kíváncsiak, akkor az előzőt balról meg kell szorozni az $\mathbf{e}_r$ bázisvektor transzponáltjával: $\mathbf{e}_r^{\mathrm{T}}\mathbf{Ap}$.

(c) Ez pontosan az $\mathbf{A}$ mátrix a_{rq} eleme. Ezt a bázisvektorok segítségével a következőképpen írhatjuk fel: $\mathbf{e}_r^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{e}_q$.

(d) Ezt úgy kapjuk, hogy összeadjuk az $\mathbf{A}$ mátrix sorait. Ezt az $\mathbf{1}$ oszlopvektor transzponáltjával való beszorzással érjük el: $\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$.

(e) Az előző mennyiséget kell az egységárakkal beszorozni: $(\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})\mathbf{p}$, avagy a boltonkénti havi bevételt összegezni: $\mathbf{1}^{\mathrm{T}}(\mathbf{Ap})$, mely két szorzat megegyezik a mátrixszorzás asszociativitása miatt.