3. vizsga megoldásvázlata

5. (a)

6. Ha $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 1)$ és a $\mathbf{v}_2 = (-2, 2, 0)$, akkor
$\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = -6, \qquad |\mathbf{v}_1| = \sqrt{6}, \qquad |\mathbf{v}_2| = \sqrt{8}$
$\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2|} = \dfrac{-6}{\sqrt{6}\sqrt{8}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, amiből $\varphi = 150°$.

7.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 10 & 10 & 2 & 21 \\ 2 & 4 & -4 & -12 & -10 \\ 2 & 6 & 4 & -2 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -4 & -12 & -10 \\ 3 & 10 & 10 & 2 & 21 \\ 2 & 6 & 4 & -2 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -6 & -5 \\ 3 & 10 & 10 & 2 & 21 \\ 2 & 6 & 4 & -2 & 8 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -6 & -5 \\ 0 & 4 & 16 & 20 & 36 \\ 0 & 2 & 8 & 10 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & 8 & 10 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -10 & -16 & -23 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 9 \end{array}\right)$$

Tehát x_3 és x_4 szabad paraméter. $x_1 = -23 + 10x_3 + 16x_4$ és $x_2 = 9 - 4x_3 - 5x_4$.

8. Leibniz-sor (teljesül a három feltétel), így konvergens. Az abszolút konvergenciához:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n^3}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{n^{3/2}},$$

ami konvergens, mert $3/2 > 1$. Tehát abszolút konvergens is (amiből a konvergencia is következik).

9. A parciális deriváltak:
$f'_x(x, y) = e^{x^2y} + xe^{x^2y} \cdot 2xy$
$f'_y(x, y) = xe^{x^2y} \cdot x^2,$
melyek a $(2, 0)$ pontban: $f'_x(2, 0) = 1$ és $f'_y(2, 0) = 8$, továbbá $f(2, 0) = 2$, így az érintősík egyenlete:

$$z = 1(x - 2) + 8y + 2, \text{ azaz } z = x + 8y$$

10. Ha a, b, c-vel jelöljük a doboz oldalhosszait deciméterben mérve, akkor a térfogata $abc = 18$, azaz $c = \frac{18}{ab}$. Ha az $a \times c$ és a $b \times c$ oldalt borítjuk kétrétűen, akkor $2ab+3ac+3bc = 2ab+\frac{54}{b}+\frac{54}{a}$ függvény minimumát keressük.
$f'_a(a, b) = 2b - \frac{54}{a^2}$
$f'_b(a, b) = 2a - \frac{54}{b^2},$
Ha ezek eltűnnek, akkor $a^2b = 27$ és $ab^2 = 27$, így $\frac{a}{b} = \frac{a^2b}{ab^2} = \frac{27}{27} = 1$, azaz $a = b$. Az első egyenletből $a = b = 3$. Ekkor $c = \frac{18}{ab} = 2$.
$f''_{aa} = \frac{108}{a^3}$
$f''_{ab} = 2$
$f''_{bb} = \frac{108}{b^3},$
amiből a Hesse-determináns: $\frac{108}{a^3}\frac{108}{b^3} - 4$, ami a $(3, 3)$ pontban pozitív, így ez lokális szélsőérték. Mivel $f''_{aa}(3, 3) = 4 > 0$, így ez lokális minimum. Tehát az optimális élhosszak: 3, 3, 2.

11. Az egyenes és a görbe metszéspontja a $2 - x^2 = x$ másodfokú egyenlet megoldása, ami -2 és 1, így e két érték között fut az x. Az y pedig a két görbe között. Tehát

$$\int_{-2}^{1}\int_{x}^{2-x^2} 2x^2y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} \left[x^2y^2\right]_{y=x}^{2-x^2} \mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} x^2(2 - x^2)^2 - x^2x^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} 4x^2 - 4x^4 + x^6 - x^4 \,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-2}^{1} 4x^2 - 5x^4 + x^6 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{3}x^3 - x^5 + \frac{x^7}{7}\right]_{-2}^{1} = \frac{4}{3} - 1 + \frac{1}{7} - \left(-\frac{32}{3} + 32 - \frac{128}{7}\right) = -\frac{18}{7} \approx -2{,}571$$