6. gyakorlat megoldásai
Cramer-szabály és mátrixegyenletek

F1. Oldjuk meg Cramer-szabállyal a következő egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 7 \\ 2x - y - 3z &= -4 \\ -x + 3y + 5z &= 10 \end{aligned}$$

M1. Cramer-szabállyal abban az esetben tudunk megoldani egy lineáris egyenletrendszert, ha az ismeretlenek és az egyenletek száma megegyezik, és az együttható mátrix determinánsa nem 0 (ilyenkor egyértelműen létezik megoldás). Az ismeretlenek értékét két determináns hányadosaként adjuk meg: a nevezőben mindig az együtthatómátrixé szerepel, míg a számlálóban az együtthatómátrixban az ismeretlennek megfelelő oszlopot kicseréljük az egyenletek jobb oldalán álló számokra:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & -3 \\ 10 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{6}{3} = 2,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ -1 & 10 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{3} = -1,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 3 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{9}{3} = 3.$$

F2. Oldjuk meg az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ mátrixegyenletet, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -3 & 6 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

M2. Az $\mathbf{X}$ mátrixot ki is találhatjuk. Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix első sora 2 0 0, így az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ első sora az $\mathbf{X}$ mátrix első sorában álló elemek kétszerese. Tehát az $\mathbf{X}$ első sora a $\mathbf{B}$ mátrix sorában álló elemek fele, azaz $2\ \ -1\ 3$. Hasonló gondolatmenettel az $\mathbf{X}$ második sora $1\ \ -2\ 0$, míg a harmadik sora $5\ \ -1\ 2$, azaz

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Másik megoldási lehetőség, hogy az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ mátrixegyenletet balról beszorozzuk $\mathbf{A}^{-1}$-zel. (Mátrixoknál lényeges, hogy melyik oldalról szorzunk!) Ekkor

$$\mathbf{X} = \mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B},$$

így az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét kell meghatároznunk. Ezt sortranszformációs módszerrel könnyen kapjuk:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_1/2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_2/(-3)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Tehát

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

melynek segítségével:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -3 & 6 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

F3. Határozzuk meg azt az $\mathbf{X}$ mátrixot, melyre teljesül, hogy

$$\mathbf{B}\,(2\mathbf{X}+\mathbf{A})=\mathbf{X},$$

ahol

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&4&2\\1&-4&-2\\2&1&1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&1&2\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

M3. A mátrixegyenletet kicsit átrendezzük (az 1-et nem tudjuk kivonni a $2\mathbf{B}$-ből, csak az egységmátrixot):

$$\begin{aligned}\mathbf{B}\,(2\mathbf{X}+\mathbf{A})&=\mathbf{X}\\ 2\mathbf{B}\cdot\mathbf{X}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}&=\mathbf{X}\\ 2\mathbf{B}\cdot\mathbf{X}-\mathbf{X}&=-\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\\ (2\mathbf{B}-\mathbf{E}_3)\cdot\mathbf{X}&=-\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\\ \mathbf{X}&=(2\mathbf{B}-\mathbf{E}_3)^{-1}\,(-\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})\end{aligned}$$

A $2\mathbf{B}-\mathbf{E}_3=\begin{bmatrix}3&2&0\\-2&1&4\\2&2&1\end{bmatrix}$ mátrix inverzéhez ki kell számolnunk a determinánst: $\det(2\mathbf{B}-\mathbf{E}_3)=-1$ és az aldeterminánsok mátrixát (melynek elemei a megfelelő sor és oszlop elhagyásával kapott 2×2-es mátrix determinánsa):

$$\begin{bmatrix}-7&-10&-6\\2&3&2\\8&12&7\end{bmatrix}.$$

Ezt még transzponálni, majd a sakktáblaszabály szerint bizonyos elemeit meg kell szorozni -1-gyel, és végül a determinánssal osztani:

$$\begin{bmatrix}-7&-10&-6\\2&3&2\\8&12&7\end{bmatrix}\ \underset{\text{ponálás}}{\overset{\text{transz-}}{\rightsquigarrow}}\ \begin{bmatrix}-7&2&8\\-10&3&12\\-6&2&7\end{bmatrix}\ \underset{\text{tábla}}{\overset{\text{sakk-}}{\rightsquigarrow}}\ \begin{bmatrix}-7&-2&8\\10&3&-12\\-6&-2&7\end{bmatrix}\ \underset{\text{osztás}}{\overset{\text{det-tel}}{\rightsquigarrow}}\ \begin{bmatrix}7&2&-8\\-10&-3&12\\6&2&-7\end{bmatrix}.$$

Innentől csak a mátrixokat kell a megfelő sorrendben összeszorozni:

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{bmatrix}7&4&2\\2&-6&-2\\6&1&1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}=(2\mathbf{B}-\mathbf{E}_3)^{-1}\,(-\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})=\begin{bmatrix}7&2&-8\\-10&-3&12\\6&2&-7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-7&-4&-2\\-2&6&2\\-6&-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&-8&-2\\4&10&2\\-4&-5&-1\end{bmatrix}.$$

F4. Határozzuk meg azt az $\mathbf{X}$ mátrixot, amelyre

$$\mathbf{X} - \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}$$

teljesül, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 2 \end{bmatrix}.$$

M4. A megadott adatok alapján $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}$ egy 1×1-es mátrix, amit nem tudunk megszorozni a C^{-1} 3×3-as mátrixszal. Persze értelmezhetjük az 1×1-es mátrixot egy számnak, és számmal tudunk szorozni mátrixot, de ez formálisan nem helyes. De csak ezzel az értelmezéssel tudjuk megoldani a feladatot. Rendezzük át az egyenletet:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} - \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{C}^{-1} &= \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} \\ \mathbf{X} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{X} \cdot (\mathbf{E}_3 - \mathbf{A}) &= \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{X} &= \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot (\mathbf{E}_3 - \mathbf{A})^{-1} \end{aligned}$$

Az $\mathbf{E}_3 - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét az aldeterminánsos módszerrel számolhatjuk, kezdjük az aldeterminánsok mátrixszával (később felhasználjuk még, hogy a determinánsa 3):

$$\begin{bmatrix} 5 & -7 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\text{ponálás}}{\overset{\text{transz-}}{\rightsquigarrow}} \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\text{tábla}}{\overset{\text{sakk-}}{\rightsquigarrow}} \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 7 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\text{osztás}}{\overset{\text{det-tel}}{\rightsquigarrow}} \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} & 2 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{C}$ mátrix inverzét inkább a sortranszformációs módszerrel érdemes számolni (hiszen majdnem diagonális):

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_1 \cdot 2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_2 \cdot (-3)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{s_3 \cdot (-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \overset{s_2 - 6s_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Tehát $\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Továbbá $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$. Ezekkel:

$$\mathbf{X} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot (\mathbf{E}_3 - \mathbf{A})^{-1} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} & 2 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} & -2 & \frac{2}{3} \\ 5 & 6 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$