6. vizsga megoldásvázlata

5. (b)

6. $$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}[\mathrm{arctg}x]_a^1 = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} \approx 2{,}356$$

7.
$$\begin{vmatrix} 2&4&1&3\\3&6&0&9\\3&5&2&7\\4&4&3&4\end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 3&6&0&9\\2&4&1&3\\3&5&2&7\\4&4&3&4\end{vmatrix} = (-3)\begin{vmatrix} 1&2&0&3\\2&4&1&3\\3&5&2&7\\4&4&3&4\end{vmatrix} = (-3)\begin{vmatrix} 1&2&0&3\\0&0&1&-3\\0&-1&2&-2\\0&-4&3&-8\end{vmatrix} = (+3)\begin{vmatrix} 1&2&0&3\\0&-1&2&-2\\0&0&1&-3\\0&-4&3&-8\end{vmatrix} =$$
$$= (-3)\begin{vmatrix} 1&2&0&3\\0&1&-2&2\\0&0&1&-3\\0&-4&3&-8\end{vmatrix} = (-3)\begin{vmatrix} 1&2&0&3\\0&1&-2&2\\0&0&1&-3\\0&0&-5&0\end{vmatrix} = (-3)\begin{vmatrix} 1&2&0&3\\0&1&-2&2\\0&0&1&-3\\0&0&0&-15\end{vmatrix} = (-3)\cdot(-15) = 45$$

8. Mivel $-16 = 16(\cos(180°) + i\sin(180°))$, így a negyedik gyökök:
$$\sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{180°}{4}\right) + i\sin\left(\frac{180°}{4}\right)\right) = 2(\cos(45°) + i\sin(45°)) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i,$$
$$\sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{180°+360°}{4}\right) + i\sin\left(\frac{180°+360°}{4}\right)\right) = 2(\cos(135°) + i\sin(135°)) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i,$$
$$\sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{180°+720°}{4}\right) + i\sin\left(\frac{180°+720°}{4}\right)\right) = 2(\cos(225°) + i\sin(225°)) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i,$$
$$\sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{180°+1080°}{4}\right) + i\sin\left(\frac{180°+1080°}{4}\right)\right) = 2(\cos(315°) + i\sin(315°)) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i.$$

9. $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n\cdot 2^{2n+1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{(2^2)^n\cdot 2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1\cdot 4\cdot 1} = \frac{1}{4},$$
így a konvergenciasugár 4. Mivel $x_0 = -3$, így $(-7,1)$ intervallumban konvergens, a széleken:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-7+3)^n}{n\cdot 2^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n\cdot 2^{2n}\cdot 2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n},\text{ ami Leibniz-sor, így konvergens.}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+3)^n}{n\cdot 2^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n\cdot 2^{2n}\cdot 2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n},\text{ ami divergens.}$$
Tehát a konvergenciaintervallum $[-7,1)$.

10. Ha a,b,c jelöli a téglatest éleit (ahol c a függőleges), akkor $abc = 2$, amiből $c = \frac{2}{ab}$. Ekkor az anyagköltség:
$f(a,b) = 8a + 8b + 4c = 8a + 8b + 4\frac{2}{ab} = 8a + 8b + \frac{8}{ab}$,
aminek a minimumát keressük. A parciális deriváltak:
$f'_a(a,b) = 8 - \frac{8}{a^2b}, \qquad f'_b(a,b) = 8 - \frac{8}{ab^2}$
E két egyenletnek egyetlen nullhelye: $a = b = 1$, ekkor $c = 2$. A második deriváltak:
$f''_{aa}(a,b) = \frac{16}{a^3b}, \qquad f''_{ab}(a,b) = \frac{8}{a^2b^2}, \qquad f''_{bb}(a,b) = \frac{16}{ab^3}$,
amiből a Hesse-determináns:
$\frac{16}{a^3b}\frac{16}{ab^3} - \left(\frac{8}{a^2b^2}\right)^2 = \frac{192}{a^4b^4}$, mely az $(1,1)$ pontban pozitív, tehát ez lokális szélsőérték. Mivel $f''_{aa}(1,1) = 16$ pozitív, így ez lokális minimum. Tehát a téglatest éleinek hossza 1, 1, 2 méter.

11. Hengerkoordinátákat használunk, ahol $0 \le r \le 3$ és $0 \le z \le 8 - 2r\sin\varphi$, így az integrál:
$$\int_0^3\int_0^{2\pi}\int_0^{8-2r\sin\varphi} 1r\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^3\int_0^{2\pi}(8-2r\sin\varphi)r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^3\int_0^{2\pi} 8r - 2r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r =$$
$$= \int_0^3 [8r\varphi + 2r^2\cos\varphi]_{\varphi=0}^{2\pi}\,\mathrm{d}r = \int_0^3 16r\pi\,\mathrm{d}r = [8r^2\pi]_{r=0}^3 = 72\pi \approx 226{,}2$$