7. gyakorlat megoldásai
Komplex számok, sajátértékek, sajátvektorok

F1. Legyen $z_1 = 3 + 2i$ és $z_2 = 1 - 3i$. Számoljuk ki az alábbiakat:

$$z_1 + z_2, \qquad z_1 - z_2, \qquad z_1 z_2, \qquad \frac{z_1}{z_2}, \qquad \overline{z_1}, \qquad |z_1|.$$

M1. A szorzásnál használjuk, hogy $i^2 = -1$, míg az osztásnál a nevező konjugáltjával bővítjük a törtet:

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (3 + 2i) + (1 - 3i) = (3 + 1) + (2 - 3)i = 4 - i,\\
z_1 - z_2 &= (3 + 2i) - (1 - 3i) = (3 - 1) + (2 - (-3))i = 2 + 5i,\\
z_1 z_2 &= (3 + 2i) \cdot (1 - 3i) = 3 - 9i + 2i - 6i^2 = 9 - 7i,\\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{3 + 2i}{1 - 3i} = \frac{(3 + 2i)(1 + 3i)}{(1 - 3i)(1 + 3i)} = \frac{3 + 9i + 2i + 6i^2}{1 + 3i - 3i - 9i^2} = \frac{-3 + 11i}{10} = -0{,}3 + 1{,}1i,\\
\overline{z_1} &= 3 - 2i,\\
|z_1| &= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.
\end{aligned}$$

F2. Legyen $z = -1 + i$. Írjuk fel trigonometrikus alakban, majd számoljuk ki a negyedik hatványát és a harmadik gyökeit.

M2. A $z = -1 + i$ komplex szám abszolútértéke: $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ és argumentuma:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{-1} + \pi = \operatorname{arctg}(-1) + \pi = \frac{3\pi}{4},$$

ahol a $+\pi$ tag azért kell, mert $\mathrm{Re} z = -1 < 0$. Így a trigonometrikus alak:

$$z = \sqrt{2}\,(\cos(135°) + i\sin(135°)).$$

Ennek segítségével:

$$\begin{aligned}
z^4 &= \left(\sqrt{2}\right)^4 (\cos(4 \cdot 135°) + i\sin(4 \cdot 135°)) = 4\,(\cos(540°) + i\sin(540°)) =\\
&= 4\,(\cos(180°) + i\sin(180°)) = -4
\end{aligned}$$

A z komplex számnak három z_1, z_2, z_3 köbgyöke van:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{135°}{3}\right) + i\sin\left(\frac{135°}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\,(\cos(45°) + i\sin(45°)) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}i,\\
z_2 &= \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{135° + 360°}{3}\right) + i\sin\left(\frac{135° + 360°}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\,(\cos(165°) + i\sin(165°)),\\
z_3 &= \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{135° + 720°}{3}\right) + i\sin\left(\frac{135° + 720°}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\,(\cos(285°) + i\sin(285°)).
\end{aligned}$$

F3. Keressük meg a $z^2 - 6z + 13 = 0$ polinom gyökeit a komplex számok körében.

M3. Bár ennek a másodfokú egyenletnek negatív a diszkrimánsa, és így nincsenek valós gyökei, a komlex számok körében van két gyöke, melyet a szokásos megoldóképlettel számolhatunk:

$$z_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i,$$

ahol felhasználtuk, hogy pozitív q valós szám esetén $\sqrt{-q} = \sqrt{q}i$.

F4. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait.

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

M4. (a) A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 6 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - 3 \cdot 6 = \lambda^2 - 7\lambda - 8,$$

melynek a gyökei $\lambda_1 = 8$ és $\lambda_2 = -1$. Egy λ sajátértékhez a sajátérvektort az $A - \lambda E_n = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer megoldásával kaphatjuk meg, mely a $\lambda_1 = 8$ esetén a következő:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3 & 6 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1/(-3)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2-3s_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tehát az x_2 a szabad paraméter, és $x_1 = 2x_2$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2x \\ x \end{bmatrix} \mid x \neq 0 \right\}.$$

A $\lambda_2 = -1$ esetben hasonlóan számolhatunk:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1/6}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2-3s_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tehát az x_2 a szabad paraméter, és $x_1 = -x_2$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -x \\ x \end{bmatrix} : x \neq 0 \right\}.$$

(b) A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & -5 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda)(-3-\lambda)+4+10+10(1-\lambda)+$$

$$+2(-3-\lambda)-2(4-\lambda) = -\lambda^3+2\lambda^2+11\lambda-12+14+10-10\lambda-6-2\lambda-8+2\lambda =$$
$$= -\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2.$$

Ennek a racionális gyökei a -2 osztói közül kerülnek ki, így próbálgatással azt találjuk, hogy $\lambda_1 = 1$ gyök, melyet így kiemelhetünk:

$$-\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2 = (\lambda-1)(-\lambda^2+\lambda+2)$$

A kapott másodfokú polinomnak a gyökei: $\lambda_2 = -1$ és $\lambda_3 = 2$. Tehát a mátrix sajátértékei: $1, -1, 2$. A sajátértékekhez a sajátvektorokat hasonlóan számolhatjuk, mint az (a) feladatban:

$\lambda_1 = 1$ esetén:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1/(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \underset{s_3-2s_1}{\overset{s_2-3s_1}{\sim}}$$
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2/2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{s_3-2s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A $\lambda_1 = 1$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} : x \neq 0 \right\}.$$

Hasonlóan $\lambda_2 = -1$ esetén:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 5 & 2 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1/(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{s_3-2s_1}{\overset{s_2-5s_1}{\sim}}$$
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2/12}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{s_3-6s_2}{\overset{s_1+2s_2}{\sim}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tehát $x_2 = 0$, és x_3 a szabad paraméter, és $x_1 = x_3$. Így a $\lambda_2 = -1$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ x \end{bmatrix} : x \neq 0 \right\}.$$

Végül $\lambda_3 = 2$ esetén:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & -5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right] \overset{s_3-s_1}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & -5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1/(-1)}{\sim}$$
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2-2s_1}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2/(-3)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1+s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tehát $x_3 = 0$ és x_2 a szabad paraméter, és $x_1 = -x_2$. Így a $\lambda_3 = 2$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -x \\ x \\ 0 \end{bmatrix} : x \neq 0 \right\}.$$

F5. Tudjuk, hogy az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ a & 4 \end{bmatrix}$ mátrix egyik sajátvektora $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$. Határozzuk meg az a paraméter értékét, a sajátértékeket, és a másik sajátvektort.

M5. Ha λ_1 a $\mathbf{v}_1$ sajátvektorhoz tartozó sajátérték, akkor $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1$, azaz

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ a & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ a+8 \end{bmatrix},$$

amiből $\lambda_1 = 3$, és ekkor $a + 8 = 3 \cdot 2$, amiből $a = -2$. Innen az előző feladathoz hasonlóan kiszámolhatjuk az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit:

$$\det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (7-\lambda)(4-\lambda) - (-2)\cdot(-2) = \lambda^2 - 11\lambda + 24,$$

melynek a másik gyöke: $\lambda_2 = 8$. Ehhez sajátvektor:

$$\left[\begin{array}{rr|r} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1/(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2+2s_1}{\sim} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Így a sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2x \\ x \end{bmatrix} : x \neq 0 \right\}.$$

Megjegyzés: lehet tudni, hogy a (főátlóra) szimmetrikus mátrixok sajátvektorai merőlegesek egymásra, tehát ha ismerjük a $\mathbf{v}_1$-et, akkor $\mathbf{v}_2 = (-2, 1)$, melynek segítségével az $\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_2$ egyenletből megkaphatjuk, hogy $\lambda_2 = 8$.

Gyakorló feladatok végeredményei

M9. $2^{11}(\cos(-330°) + i\sin(-330°)) = 1024\sqrt{3} + 1024i$.

M10. A karakterisztikus egyenlet: $-\lambda^3+\lambda^2+2\lambda$, melynek gyökei $0, 2, -1$ a sajátértékek.
0-hoz tartozó sajátvektorok: $\{(-2x, x, 0) \mid x \neq 0\}$,
2-höz tartozó sajátvektorok: $\{(-2x, x, 2x) \mid x \neq 0\}$,
-1-hez tartozó sajátvektorok: $\{(-x, -x, x) \mid x \neq 0\}$.