

9. gyakorlat megoldásai

Hatványsorok, Taylor-sorok

F1. Állapítsuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciatartományát.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^{n-1}}, \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n!}.$$

M1. Egy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergenciasugarát az

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$$

képletel számolhatjuk. Ekkor a hatványsor az $(x_0 - r, x_0 + r)$ intervallumban konvergens, a határpontokat külön meg kell nézni, hogy ott konvergens-e.

(a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ és $x_0 = 0$. A konvergenciasugarához

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt[2n]{n}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} \rightarrow 1,$$

így a konvergenciasugár 1. Még meg kell nézni az intervallumon határain, azaz ± 1 -ben:

$x = 1$ esetén a hatványsor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, ami divergens.

$x = -1$ esetén a hatványsor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, ami Leibniz-sor, így konvergens.

Tehát a konvergenciatartomány a $[-1, 1)$ intervallum.

(b) $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ és $x_0 = 2$. A konvergenciasugarához:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n-1}}} = \sqrt[n]{\frac{2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{2}}{2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

A konvergenciasugár ennek a reciproka, azaz 2. Így a hatványsor a $(0, 4)$ intervallumban biztosan konvergens. A két határpont:

$x = 4$ esetén a hatványsor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-2)^n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2$, ami divergens.

$x = 0$ esetén a hatványsor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0-2)^n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot 2$, ami szintén divergens.

Tehát a konvergenciatartomány a $(0, 4)$ intervallum.

(c) $a_n = \frac{1}{n!}$ és $x_0 = 5$. Ebben az esetben a konvergenciasugarat a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

határértékből számoljuk (a faktoriális miatt a gyökös nem szerencsés). A konvergenciasugár ennek a reciproka, ami 0 esetén azt jelenti, hogy a sugár végtelen, így a hatványsor az egész számegetesen konvergens.

F2. Írjuk fel a megadott függvények $x_0 = 0$ pont körüli Taylor-sorát. Határozzuk meg a sorok konvergenciasugarát is.

(a) $\cos(5x)$,

(b) e^{-x^2} ,

(c) $\frac{x}{4+x^2}$,

(d) $\frac{x+1}{x+3}$.

M2. (a) Mivel $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, így

$$\cos(5x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(5x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n}}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-25)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Mivel a \cos függvény hatványsora minden $x \in \mathbb{R}$ -re konvergens, így a $\cos(5x)$ függvényé is, azaz a konvergenciasugár végtelen.

(b) Mivel $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, így

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}.$$

Mivel az e^x hatványsora minden $x \in \mathbb{R}$ -re konvergens, így az e^{-x^2} függvényé is, azaz a konvergenciasugár végtelen.

(c) Itt azt használjuk fel, hogy $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, ha $|x| < 1$.

$$\frac{x}{4+x^2} = \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} = \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x^2}{4}\right)} = \frac{x}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{2n+1},$$

ha $\left| -\frac{x^2}{4} \right| < 1$, azaz $|x| < 2$, ami azt jelenti, hogy a konvergenciasugár 2.

(d) Itt egy kicsit alakítani kell először:

$$\frac{x+1}{x+3} = \frac{x+3-2}{x+3} = 1 - \frac{2}{x+3}$$

A $\frac{2}{x+3}$ már hasonló a (c) feladathoz:

$$\frac{2}{x+3} = \frac{2}{3+x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{x}{3})} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2}{3^{n+1}} x^n.$$

Ebből:

$$\frac{x+1}{x+3} = 1 - \frac{2}{x+3} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2}{3^{n+1}} x^n = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^n \cdot 2}{3^{n+1}} x^n,$$

ahol az utolsó lépésben a konstanstagokat (1-et és az $n = 0$ tagot) összevontuk.

F3. Számoljuk ki $\sin 1$ és $\frac{1}{e}$ értékét 3 tizedesjegy pontossággal.

M3. Mivel $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, így

$$\sin 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} + \dots$$

Ez egy Leibniz-sor, így a sor egy részletösszegének az összegtől való eltérését a következő tag abszolút értékével becsülhetjük. Mivel három tizedesjegy pontossággal szeretnénk becsülni, így egy ezrednél kisebb hibát szeretnénk, azaz ha az $\frac{1}{5040}$ taggal becsülhetünk, akkor

$$\left| \sin 1 - \frac{101}{120} \right| < \frac{1}{5040}.$$

Tehát $\sin 1 \approx \frac{101}{120} = 0,84166666\dots$. Valójában $\sin 1 = 0,841470985\dots$, tehát az első három tizedesjegy tényleg azonos.

Az $\frac{1}{e}$ hasonlóan az $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hatványsorból:

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} + \dots$$

Ez is egy Leibniz-sor, így hasonlóan becsülhetünk, mint az előző feladatrésznél.

Az $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{265}{720}$ részletösszezből

$$\left| \frac{1}{e} - \frac{265}{720} \right| < \frac{1}{5040}.$$

Tehát $\frac{1}{e} \approx \frac{265}{720} = \frac{53}{144} = 0,3680555\dots$, míg $\frac{1}{e} = 0,367879441\dots$. Kerekítve itt is megegyezik az első három tizedesjegy.

Gyakorló feladatok végeredményei

M4. $(-4, 2)$

M5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+2}$

M6. $1 - \frac{0,01^2}{2} = 0,99995$