# Matematika A2a - Vektorfüggvények elméleti kérdései

## (műszaki menedzser szak, 2019. tavasz)

**Első típusú improprius integrál: Végtelen tartományon korlátos függvény**

Legyen $f$ integrálható minden $\beta > a$ esetén az $[a, \beta]$-n. Ha a $\lim\limits_{\beta\to\infty} \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy az $f$ függvény impropius integrálja létezik, és $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\beta\to\infty} \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$.

**Második típusú improprius integrál: Véges tartományon nem korlátos függvény**

Legyen $f$ integrálható $[\alpha, b]$-n minden $\alpha \in (a, b)$ esetén, és $f$ nem korlátos az $[a, b]$-n Ha létezik és véges a $\lim\limits_{\alpha\to a+} \int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x$ határérték, akkor $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\alpha\to a+} \int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x$

**Skaláris szorzat**

Az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzata az $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi$ szám, ahol $\varphi$ jelöli az általuk bezárt szöget. Ha az $\mathbf{a}$ koordinátái $(a_1, a_2, a_3)$, míg a $\mathbf{b}$ koordinátái $(b_1, b_2, b_3)$, akkor a skaláris szorzatuk $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Jelölés: $\mathbf{ab}$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ vagy $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$.

**Vektoriális szorzat**

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ háromdimenziós vektorok vektoriális szorzata az a $\mathbf{c}$ vektor, melyre a következők teljesülnek:

1. $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$, ahol $\varphi$ jelöli az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ által bezárt szöget;
2. $\mathbf{c}$ merőleges az $\mathbf{a}$-ra és a $\mathbf{b}$-re;
3. az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok jobbrendszert alkotnak.

Jelölése: $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.
Ha az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, akkor $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$.

**Vegyes szorzat**

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ háromdimenziós vektorok vegyes szorzata az $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}$ (vektoriális, majd skaláris) szorzat.
Jelölés: $\mathbf{abc}$.
Geometriai jelentése: az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata.

**Sík Hesse-féle normálegyenlete**

Az $\mathbf{n} = (a, b, c)$ normálvektorú sík Hesse-féle normálegyenlete:

$$\frac{ax + by + cz - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.$$

**Pont és sík távolsága**

A $P(x_0, y_0, z_0)$ pont távolsága az $ax + by + cz = d$ egyenletű síktól:

$$\left|\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|.$$

**Egyenes paraméteres megadása**

Az $\mathbf{v} = (a, b, c)$ irányvektorú $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő egyenes paraméteres egyenlete

$$\{P + \lambda\mathbf{v} = (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

**Egyenes egyenletrendszere a térben**

Az $(a, b, c)$ irányvektorú $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő egyenes egyenletrendszere

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

**Lineáris összefüggőség**
A $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ $n$ dimenziós vektorok lineárisan összefüggenek, ha vannak olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ számok úgy, hogy $\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k \cdot \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ és a $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ számok nem mindegyike 0.

**Lineáris függetlenség**
A $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ $n$ dimenziós vektorok lineárisan függetlenek, ha a $\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k \cdot \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ egyenlőségből következik, hogy $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.

**Altér**
Az $\mathbb{R}^n$ tér egy $V$ részhalmaza altér, ha teljesül a következő két feltétel: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ esetén $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V$ és $\mathbf{v} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda\mathbf{v} \in V$.

**Mátix rangja**
Egy mátrix rangja a benne található lineárisan független oszlopvektorok maximális száma. Ez ugyanannyi, mint a benne található lineárisan független sorvektorok maximális száma. A legnagyobb méretű nemnulla aldeterminány mérete szintén a mátrix rangjával egyezik meg.

**Lineáris egyenletrendszerek megoldásának mátrixrangos vizsgálata**
Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg (ahol $A$ $m \times n$-es mátrix, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$), ha az egyenletrendszer mátrixának és a kibővített mátrixnak a rangja megegyezik ($\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A|\mathbf{b})$).
A lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha az egyenletrendszer mátrixának és a kibővített mátrixnak a rangja egymással és az ismeretlenek számával is megyegyezik ($\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A|\mathbf{b}) = n$).
Ha $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A|\mathbf{b}) < n$, akkor $n - \mathrm{r}(A)$ változó tetszőlegesen megválasztható (szabad paraméter).

**Kifejtési tétel**
Az $n \times n$-es $A$ mátrix determinánsát kiszámíthatjuk a következő formulák segítségével (sor, illetve oszlop szerinti kifejtés):

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{i,j},$$
$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{i,j},$$

ahol $A_{i,j}$ jelöli az $A$ mátrix $i$-edik sorának és $j$-edik oszlopának elhagyásával kapott $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsát.

**Inverz mátrix**
A négyzetes $A$ mátrix inverze az a $A^{-1}$-gyel jelölt mátrix, melyre $AA^{-1} = E_n$ és $A^{-1}A = E_n$.

**Inverz mátrix létezésének feltétele**
A négyzetes $A$ mátrixnak pontosan akkor létezik inverze, ha a determinánsa nem 0.

**Inverz mátrix kiszámítása**
Ha az $n \times n$-es $A$ mátrix invertálható, akkor az inverzének $i$-edik sorának $j$-edik eleme:

$$(A^{-1})_{i,j} = (-1)^{i+j} A_{j,i} / \det(A),$$

ahol $A_{j,i}$ jelöli az $A$ mátrix $j$-edik sorának és $i$-edik oszlopának elhagyásával kapott $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsát.
Az inverz kiszámolására másik módszer a Gauss-elimináció.

**Mátrix sajátértéke, sajátvektora**
Egy $n \times n$-es $A$ mátrix sajátértéke $\lambda \in \mathbb{R}$, ha van olyan $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ nemnulla vektor, hogy $A\mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$. Ekkor a $\mathbf{v}$-t a $\lambda$-hoz tartozó sajátvektornak nevezzük.

**Diagonális mátrix**
Egy négyzetes mátrixot diagonálisnak nevezünk, ha a főátlón kívül az összes eleme 0.

**Diagonalizálható mátrix**
Egy $A$ mátrixot diagonalizálhatónak nevezünk, ha létezik olyan invertálható $C$ mátrix, hogy a $C^{-1}AC$ mátrix diagonális.

**Diagonalizálhatóság feltétele**
Egy $n \times n$-es mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha van $n$ darab lineárisan független sajátvektora.

**Áttérés algebrai alakról trigonometrikus alakra**
A $z = a + bi$ komplex szám trigonometrikus alakja $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, és

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\frac{b}{a}), & \text{ha } a > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}(\frac{b}{a}), & \text{ha } a < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{ha } a = 0 \text{ és } b > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{ha } a = 0 \text{ és } b < 0. \end{cases}$$

**Komplex számok $n$-edik hatványa**
A $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ komplex szám $n$-edik hatványa: $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$.

**Komplex számok $n$-edik gyökének meghatározása**
A $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ komplex szám $n$-edik gyökei a

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

komplex számok $k = 0, 1, \ldots, n-1$-re.

**Algebra alaptétele**
Egy polinomnak a komplex számok körében mindig van gyöke.

**Valós számsorozat**
Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számhoz hozzárendelünk egy $a_n$ valós számot.

**Valós számsorozat véges határértéke**
Az $(a_n)$ sorozat határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$. Jelölés: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

**Valós számsorozat végtelen határértéke**
Ha az $(a_n)$ sorozathoz minden $K \in \mathbb{R}$ számhoz létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n > N$ esetén $K < a_n$, akkor az $(a_n)$ sorozat a végtelenbe tart, ezt így jelöljük: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

**Valós számsorozat mínusz végtelen határértéke**
Ha az $(a_n)$ sorozathoz minden $K \in \mathbb{R}$ számhoz létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n > N$ esetén $a_n < K$, akkor az $(a_n)$ sorozat a mínusz végtelenbe tart, ezt így jelöljük: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

**Numerikus sor**
Tetszőleges $(a_n)$ sorozatból képezett $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$ formális összeget (numerikus) sornak nevezünk, melyet általában $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ alakban írunk.

**Numerikus sor konvergenciája**
Egy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort konvergensnek mondunk, ha az $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ részletösszegsorozat konvergens.

**Leibniz-sor**
Olyan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor, melyben az $a_n$ tagok váltakozó előjelűek, abszolút értékben monoton csökkennek és 0-hoz tartanak.

**Leibniz-sorok konvergenciája**
Minden Leibniz-sor konvergens.

**Hibabecslés Leibniz-soroknál**
A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Leibniz-sorra és tetszőleges $N \in \mathbb{N}$-re

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n\right| \le |a_{N+1}|.$$

**Harmonikus és hiperharmonikus sorok konvergenciája**
A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ sor pontosan akkor konvergens, ha $1 < a$.

**Majoráns kritérium**
Ha az $(a_n)$ és $(b_n)$ számsorozatokhoz található olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $0 \le a_n \le b_n$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is konvergens.

**Minoráns kritérium**
Ha az $(a_n)$ és $(b_n)$ számsorozatokhoz található olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $0 \le a_n \le b_n$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor is divergens.

**Gyökkritérium**
A pozitív tagú $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, és divergens, ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$.

**Hányados kritérium**
A pozitív tagú $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ha $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, és divergens, ha $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

**Hatványsor**
A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ alakú sort $x_0$ középpontú hatványsornak mondjuk.

**Konvergenciatartomány**
Egy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergenciatartományának azt a halmazt nevezzük, melynek $x$ elemeire a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ sor konvergens.

**Cauchy–Hadamard-tétel**
A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$ hatványsor konvergenciasugara: $r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, akkor $r = \infty$, míg ha $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, akkor $r = 0$.
A hatványsor az $(a-r, a+r)$ intervallumban konvergens, az $[a-r, a+r]$ intervallumon kívül divergens.

**A hatványsorok tagonkénti deriválására vonatkozó tétel**
Az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergencia intervallumának belsejében a tagonkénti deriválással kapott $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ hatványsor is konvergens, és egyenlő $f'(x)$-szel.

**A hatványsorok tagonkénti integrálására vonatkozó tétel**
Az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergencia intervallumának belső részintervallumaiban tagonként integrálható, azaz $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}[x^{n+1}]_a^b$, ha $a$ és $b$ a konvergenciaintervallum belsejébe esik.

**Taylor-sor**
Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in \mathbb{R}$ körüli Taylor-sora a következő hatványsor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots.$$

**Taylor-polinom**
Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in \mathbb{R}$ körüli $N$-edfokú Taylor-polinomja a következő polinom:

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(N)}(x_0)}{N!}(x-x_0)^N.$$

**Parciális derivált**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^m$ függvény az $a = (a_1, \dots, a_m) \in D_f$ pontban $x_i$ szerint parciálisan deriválható, ha az egyváltozós $x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_m)$ függvény az $a_i$ helyen differenciálható. A

$$\lim_{x_i \to a_i} \frac{f_i(x_i) - f_i(a_i)}{x_i - a_i}$$

differenciálhányadost az $f$ függvény $x_i$ szerinti parciális deriváltjának nevezzük.
Jelölése: $f'_{x_i}(a)$ vagy $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$.

**Iránymenti derivált**
Az $f: D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ függvény $P_0 \in D_f$ pontbeli $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ iránymenti deriváltján ($|\mathbf{e}| = 1$) a

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{\left|\overrightarrow{P_0 P}\right|},$$

határértéket értjük, ahol $P$ úgy tart a $P_0$-hoz, hogy a $\overrightarrow{P_0 P}$ vektor az $\mathbf{e}$-vel párhuzamos és egyenlő állású. A határértéket így is felírhatjuk:

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(P_0 + t\mathbf{e}) - f(P_0)}{t}$$

Jelölés: $f'_{\mathbf{e}}(P_0)$ vagy $\frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}}$.

**Gradiens**
Ha az $n$ változós $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvénynek valamely $P_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban mindegyik parciális deriváltja létezik, akkor az $f$ függvény $P_0$-beli gradiensén a $P_0$-beli parciális deriváltakból álló $n$ dimenziós vektort értjük: $\mathrm{grad} f(P_0) = (f'_{x_1}(P_0), f'_{x_2}(P_0), \ldots, f'_{x_n}(P_0))$.

**Jacobi-mátrix**
Ha $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény minden komponensének mindegyik parciális deriváltja létezik valamely $P \in \mathbb{R}^n$ pontban, akkor az $f$ függvény $P$-beli Jacobi-mátrixán a komponens függvények parciális deriváltjaiból álló mátrixok értjük: az $i$-edik sorának a $j$-edik eleme az $i$-edik komponens függvény $j$-edik változója szerinti parciális deriváltja.

**Többváltozós valós függvény differenciálhatósága**
Az $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ többváltozós valós függvényről akkor mondjuk, hogy az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban differenciálható, ha minden változója szerint parciálisan deriválható $\mathbf{x}_0$-ban és teljesül az

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

egyenlőség, ahol A az $f$ Jacobi-mátrixa $\mathbf{x}_0$-ban és $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ esetén $\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \to 0$.

**Többváltozós függvény lokális minimuma**
Az $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ többváltozós függvénynek az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban lokális minimuma van, ha az $\mathbf{x}_0$ pontnak van olyan $D$ környezete, hogy $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$ minden $\mathbf{x} \in D$ esetén.

**Többváltozós függvény lokális maximuma**
Az $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ többváltozós függvénynek az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban lokális maximuma van, ha az $\mathbf{x}_0$ pontnak van olyan $D$ környezete, hogy $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$ minden $\mathbf{x} \in D$ esetén.

**Kétváltozós függvény lokális szélsőértékeire vonatkozó szükséges feltétel**
Ha a kétváltozós valós függvénynek valamely pontban lokális szélsőértéke van, akkor abban a pontban létező parciális deriváltjai 0-k.

**Kétváltozós függvény lokális szélsőértékeire vonatkozó elégséges feltétel**
Ha az $(x_0, y_0)$ pont valamely környezetében az $f(x, y)$ függvény második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0 \quad \text{és} \quad f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0,$$

akkor az $f(x, y)$ függvénynek lokális szélsőértéke van az $(x_0, y_0)$ pontban. Ez a lokális szélsőérték minimum, ha $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, és maximum, ha $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$.

**Kétváltozós függvény nyeregpontra vonatkozó elégséges feltétel**
Ha az $(x_0, y_0)$ pont valamely környezetében az $f(x, y)$ függvény második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0 \quad \text{és} \quad f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 < 0,$$

akkor az $f(x, y)$ függvénynek nincs lokális szélsőértéke az $(x_0, y_0)$ pontban (nyeregpont).

**Kettős integrál transzformációjára vonatkozó tétel**
Legyen $f(x,y)$ a síkbeli $V$ tartományon integrálható függvény. Ha $x = x(u,v)$ és $y = y(u,v)$ az $u$ és a $v$ szerint parciálisan deriválható olyan függvények, amelyek a $V$ tartomány pontjai és az $(u,v)$ számpárok bizonyos $W$ halmaza között (az $x, y$ legfeljebb véges számú értékének kivételével) kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítenek, akkor

$$\iint_V f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_W f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

ahol a Jacobi-determináns

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

**Hármas integrál transzformációjára vonatkozó tétel**
Legyen $f(x,y,z)$ a térbeli $V$ tartományon integrálható függvény. Az $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$ és $z = z(u,v,w)$ az $u, v$ és a $w$ szerint parciálisan deriválható olyan függvények, amelyek a $V$ tartomány pontjai és az $(u,v,w)$ számhármasok bizonyos $W$ halmaza között (az $x, y, z$ legfeljebb véges számú értékének kivételével) kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítenek. Ekkor az $f$ függvény hármas integrálja kifejezhető a következőképpen

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_W f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w,$$

ahol a Jacobi-determináns

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

**Tömegközéppont kiszámítása**
A térbeli $V$ tartomány tömegközéppontja $\left(\frac{m_x}{m}, \frac{m_y}{m}, \frac{m_z}{m}\right)$, ahol

$$\begin{aligned} m &= \iiint_V \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ m_x &= \iiint_V x\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ m_y &= \iiint_V y\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ m_z &= \iiint_V z\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \end{aligned}$$

ahol $\varrho(x,y,z)$ jelöli a sűrűségfüggvényt.