10. előadás

Monotonitás és lokális szélsőértékek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2021. október 18.

Monotonitás

Tétel:
Ha az $f(x)$ függvény differenciálható és értelmezett az I intervallumon, akkor

- $f'(x) \geq 0$ minden $x \in I$-re $\Leftrightarrow$ f monoton nő az I intervallumon.
- $f'(x) \leq 0$ minden $x \in I$-re $\Leftrightarrow$ f monoton csökken az I intervallumon.

Megjegyzés:
Szigorú monotonitásra nincs hasonló állítás!

Például $f(x) = x^3$ szigorúan monoton nő: $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, de $f'(0) = 0$.

Példa

Mely intervallumokon monoton az $f(x) = e^x - x$ függvény?

Példa

Mely intervallumokon monoton az $f(x) = e^x - x$ függvény?

$f'(x) = e^x - 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ e^x - 1 &\geq 0 \\ e^x &\geq 1 \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

azaz az f függvény a $[0, +\infty)$ intervallumon monoton nő.

$$\begin{aligned} f'(x) &\leq 0 \\ e^x - 1 &\leq 0 \\ e^x &\leq 1 \\ x &\leq 0, \end{aligned}$$

azaz az f függvény a $(-\infty, 0]$ intervallumon monoton csökken.

Lokális szélsőérték

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontja
lokális maximumhely, ha van olyan $\delta > 0$, hogy
$f(x) \leq f(x_0)$ minden $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ esetén.

A lokális maximum az $f(x_0)$ függvényérték.

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontja
lokális minimumhely, ha van olyan $\delta > 0$, hogy
$f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ esetén.

A lokális minimum az $f(x_0)$ függvényérték.

Lokális szélsőérték: lokális minimum vagy lokális maximum.

Lokális szélsőértékhely: lokális minimumhely vagy lokális maximumhely.

Megjegyzés:
Nem tesszük fel, hogy a függvény differenciálható.
Például: $f(x) = |x|$ függvény lokális minimuma van $x_0 = 0$-ban.

Lokális szélsőérték feltételei

Ha a függvény differenciálható:

Tétel (lokális szélsőérték szükséges feltétele):
Ha az $f(x)$ függvénynek az x_0 pontban lokális szélsőértéke van, és az x_0-ban differenciálható a függvény, akkor $f'(x_0) = 0$.

Megjegyzés:
Az $f'(x_0) = 0$-ből nem következik, hogy x_0-ban lokális szélsőérték van: például $f(x) = x^3$ függvény $x_0 = 0$ pontban.

Szeretnénk elégséges feltételt a lokális szélsőértékre:

Ha a függvény
$(x_0 - \delta, x_0)$-ban monoton nő (azaz $f'(x) \geq 0$) és
$(x_0, x_0 + \delta)$-ban monoton csökken (azaz $f'(x) \leq 0$),
akkor x_0-ban lokális maximum van.

Ha a függvény
$(x_0 - \delta, x_0)$-ban monoton csökken (azaz $f'(x) \leq 0$) és
$(x_0, x_0 + \delta)$-ban monoton nő (azaz $f'(x) \geq 0$),
akkor x_0-ban lokális minimum van.

Példa

$f(x) = -x^2 - 2x + 4$ függvény lokális szélsőértékei

Példa

$f(x) = -x^2 - 2x + 4$ függvény lokális szélsőértékei

$f'(x) = -2x - 2$, melynek nullhelye $x_0 = -1$

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ -2x - 2 &\geq 0 \\ -2x &\geq 2 \\ x &\leq -1 \\ x &\in (-\infty, -1] \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f'(x) &\leq 0 \\ -2x - 2 &\leq 0 \\ -2x &\leq 2 \\ x &\geq -1 \\ x &\in [-1, +\infty) \end{aligned}$$

monoton nő   monoton csökken

Tehát az $x_0 = -1$ lokális maximumhely.
A lokális maximum a függvényérték:
$f(x_0) = f(-1) = 5.$

Magasabbrendű deriváltak

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény másodrendű/második deriváltja az $f'(x)$ függvény deriváltja (feltéve, hogy létezik).

Jelölése: $f''(x)$ vagy $\dfrac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}$, stb.

Hasonlóan n-edrendű/n-edik derivált az $n-1$-edrendű deriváltnak a deriváltja (feltéve, hogy létezik).

Jelölés: $f^{(n)}(x)$ vagy $\dfrac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}$, stb.

Példák:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & g(x) &= x^3 - 3x^2 - 7x - 1 \\ f'(x) &= \cos x & g'(x) &= 3x^2 - 6x - 7 \\ f''(x) &= -\sin x & g''(x) &= 6x - 6 \\ f'''(x) &= -\cos x & g'''(x) &= 6 \\ f^{(4)}(x) &= \sin x & g^{(4)}(x) &= 0 \\ f^{(5)}(x) &= \cos x & g^{(5)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Elégséges feltétel lokális szélsőértékre

Ha az f függvény kétszer differenciálható, és $f'(x_0) = 0$, és

- $f''(x_0) > 0$, akkor x_0-ban lokális minimum van.
- $f''(x_0) < 0$, akkor x_0-ban lokális maximum van.

Megjegyzés:
Visszafelé ez nem igaz:
$f(x) = x^4$ függvénynek $x_0 = 0$-ban lokális minimuma van, de
$f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, így $f''(0) = 0$.

Példa

Az $f(x) = x^3 - 3x$ függvény lokális szélsőértékei

Példa

Az $f(x) = x^3 - 3x$ függvény lokális szélsőértékei

$f'(x) = 3x^2 - 3$ és $f''(x) = 6x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 3 &= 0 \\ 3x^2 &= 3 \\ x^2 &= 1 \\ x_{1,2} &= \pm 1 \end{aligned}$$

Az $x_1 = +1$-ben $f''(x_1) = f''(+1) = +6 > 0$, tehát ez lokális minimumhely, a lokális minimum értéke: $f(x_1) = f(+1) = -2$.

Az $x_2 = -1$-ben $f''(x_2) = f''(-1) = -6 < 0$, tehát ez lokális maximumhely, a lokális maximum értéke: $f(x_2) = f(-1) = +2$.

Egy általánosabb tétel

Tétel:
Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény n-szer differenciálható, és

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \text{ de } f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Ekkor páratlan n esetén x_0 nem lokális szélsőérték,
míg páros n esetén x_0 lokális szélsőérték, éspedig

- $f^{(n)}(x_0) > 0$ esetén x_0 lokális minimumhely.
- $f^{(n)}(x_0) < 0$ esetén x_0 lokális maximumhely.

Példa:
Meggondolható, hogy $f(x) = x^n$ esetén:
$f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$ és $f^{(n)}(0) = n!$

Összefoglalás

Szükséges feltétel:
x_0 lokális szélsőérték, akkor $f'(x_0) = 0$

Elsőrendű elégséges feltétel:

$f'(x_0) = 0$ és $(x_0 - \delta, x_0)$-ban $f'(x) \leq 0$,
$(x_0, x_0 + \delta)$-ban $f'(x) \geq 0$, akkor x_0 lokális minimumhely

$f'(x_0) = 0$ és $(x_0 - \delta, x_0)$-ban $f'(x) \geq 0$,
$(x_0, x_0 + \delta)$-ban $f'(x) \leq 0$, akkor x_0 lokális maximumhely

Másodrendű elégséges feltétel:

$f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0$, akkor x_0 lokális minimumhely
$f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) < 0$, akkor x_0 lokális maximumhely