

11. előadás

Globális szélsőértékek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2021. október 20.

Globális/abszolút szélsőértékek

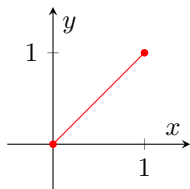
Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontja **globális/abszolút maximumhely**, ha $f(x) \leq f(x_0)$ minden $x \in D_f$ esetén.

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontja **globális/abszolút minimumhely**, ha $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in D_f$ esetén.

A globális minimum/maximum lehet lokális szélsőérték vagy az értelmezési tartomány szélén is.

Példa:

$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ függvény
globális minimuma $x = 0$ -ban 0, és
globális maximuma $x = 1$ -ben 1.



Példa

Keressük meg az

$$f: [-\sqrt{3}, 3] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^3 - 3x$$

függvény globális szélsőértékeit!

Lokális szélsőértékek: $f'(x) = 3x^2 - 3$,
azaz $x_{1,2} = \pm 1$ -ben.

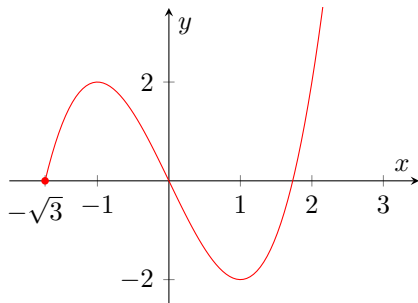
Lokális minimum az $x_1 = +1$ pontban -2 ,
míg lokális maximum az $x_2 = -1$ pontban $+2$.

Az intervallum szélein a függvény értéke:

$$f(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^3 - 3(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 0$$

$$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3 = 27 - 9 = 18$$

Így az abszolút minimumérték: -2 ($x = 1$ -ben),
és az abszolút maximumérték: 18 ($x = 3$ -ban).



Nem korlátos intervallum esete

Ha a függvény nem korlátos intervallumon van értelmezve, akkor határértéket kell számolni.

Példa: $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

A lokális szélsőérték kereséséhez megnézzük a deriváltat:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2},$$

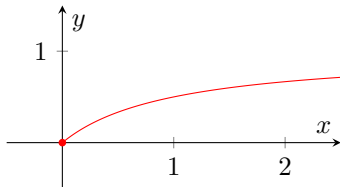
ami soha nem 0, így nincs lokális szélsőérték.

Az intervallum széléin:

$$f(0) = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

Tehát a globális minimumérték 0 ($x=0$ -ban), míg globális maximum nincs, mert az 1-et nem veszi fel a függvény (ez a legkisebb felső korlát).



Nyílt intervallum esete

$$f(x) = \ln(x - 1) + \ln(2 - x)$$

Nyílt intervallum esete

$$f(x) = \ln(x-1) + \ln(2-x)$$

Ezt a függvényt csak $x-1 > 0$ és $2-x > 0$ esetén, azaz az $(1, 2)$ intervallumon tudjuk értelmezni.

Lokális szélsőértékeihez a derivált:

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2-x} = \frac{(2-x) - (x-1)}{(2-x)(x-1)} = \frac{3-2x}{(2-x)(x-1)},$$

melynek nullhelye az $x_0 = 3/2$ -ben van. A második derivált:

$$f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \left(-\frac{1}{(2-x)^2} \cdot (-1) \right) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(2-x)^2},$$

melynek értéke $x_0 = 3/2$ -ben:

$$f''(x_0) = f''\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -8,$$

ami negatív, tehát ez lokális maximum. A függvény értéke:

$$f(x_0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \ln 2.$$

Nyílt intervallum esete – folytatás

$$f(x) = \ln(x - 1) + \ln(2 - x) \quad (x \in (1, 2))$$

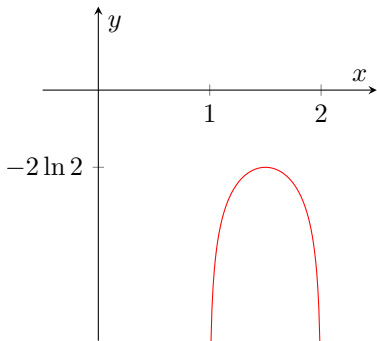
Az intervallum szélső pontjaiban nincs értelmezve a függvény, így ott csak határértékeket tudunk venni:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x - 1) + \ln(2 - x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(x - 1) + \ln(2 - x) = -\infty$$

Tehát a függvény tetszőlegesen kicsi értéket felvesz, így nincs globális minimuma.

A globális maximum a lokális maximummal egyezik meg, melynek értéke $-2 \ln 2$.



Egy periodikus függvény

$$f(x) = \sin^2(2x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Egy periodikus függvény

$$f(x) = \sin^2(2x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

A derivált értéke:

$$f'(x) = 2 \sin(2x) \cos(2x) \cdot 2 = 2 \sin(4x)$$

Ennek nullhelyei:

$$2 \sin(4x) = 0$$

$$4x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x = k \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

A második derivált:

$$f''(x) = 2 \cos(4x) \cdot 4 = 8 \cos(4x),$$

melynek értéke a $k \frac{\pi}{4}$ helyeken:

$$f''\left(k \frac{\pi}{4}\right) = 8 \cos(k\pi) = 8 \cdot (-1)^k,$$

mely páros k esetén $8 > 0$, azaz lokális minimum (függvény értéke 0),
míg páratlan k esetén $-8 < 0$, azaz lokális maximum (függvény értéke 1).

Az intervallum szélein ebben az esetben nem létezik a határérték, de azt tudjuk,
hogy a függvény értéke 0 és +1 között van.

Hengeres feladat

Határozzuk meg az 1 literes, felül nyitott legkisebb felszínű henger adatait!

Ha a henger alapjának a sugara r , és a magassága m , akkor a térfogata $r^2\pi m$, melynek 1-nek kell lennie (feltéve, hogy deciméterben mérjük a hosszakat):

$$r^2\pi m = 1,$$

ebből kifejezhetjük a magasságot:

$$m = \frac{1}{r^2\pi}.$$

A felszín felhasználva a magasság kifejezését:

$$A = r^2\pi + 2\pi r m = r^2\pi + 2\pi r \frac{1}{r^2\pi} = r^2\pi + \frac{2}{r}$$

Ennek az r -től függő kifejezésnek keressük a minimumát.

Hengeres feladat – folytatás

$$A(r) = r^2\pi + \frac{2}{r}$$

kifejezés minimumát keressük. Először lokális szélsőértékeket keresünk:

$$A'(r) = 2r\pi - \frac{2}{r^2},$$

ami ha eltűnik, akkor $2r_0\pi = \frac{2}{r_0^2}$, azaz $r_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$.

A második derivált értéke:

$$A''(r) = 2\pi - (-2)\frac{2}{r^3} = 2\pi + \frac{4}{r^3},$$

ami az r_0 helyen:

$$A''(r_0) = A''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = 2\pi + \frac{4}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^3} = 2\pi + 4\pi = 6\pi > 0,$$

így ez valóban lokális minimum.

Hengeres feladat – folytatás

$$A(r) = r^2\pi + \frac{2}{r}$$

kifejezés $r \in (0, +\infty)$ esetén értelmes, tehát ezen intervallum határain nézzük a határértékeket:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} A(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} r^2\pi + \frac{2}{r} = +\infty$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} r^2\pi + \frac{2}{r} = +\infty$$

Tehát az $r_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$ pontban globális minimum van.

Ugyanerre az eredményre juthatunk, ha meggondoljuk, hogy az A függvény a $(0, r_0)$ intervallumban monoton csökken, míg az $(r_0, +\infty)$ intervallumban monoton nő.

Ebben az esetben a henger magassága:

$$m_0 = \frac{1}{r_0^2\pi} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2 \pi} = \frac{1}{\pi^{1-\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$$

Populista Párt

A Populista Párt vezetője tudja, hogy ha hatalomra kerülése esetére a bérek x -szeresére való növekedését ígéri meg, akkor a szavazók $30(x - 1)^2$ százaléka nem fog hinni neki (és így nem fognak rájuk szavazni), viszont a maradék szavazók $50(x - 1)$ százaléka a pártra fog szavazni. Hányszoros bérnövekedést kell ígérnie, hogy a lehető legtöbb szavazatot kapja?

Populista Párt

A Populista Párt vezetője tudja, hogy ha hatalomra kerülése esetére a bérek x -szeresére való növekedését ígéri meg, akkor a szavazók $30(x - 1)^2$ százaléka nem fog hinni neki (és így nem fognak rájuk szavazni), viszont a maradék szavazók $50(x - 1)$ százaléka a pártra fog szavazni. Hányszorosos bérnövekedést kell ígérnie, hogy a lehető legtöbb szavazatot kapja?

Ha a bérek x -szeresére való növekedését ígérik ($x \geq 1$), akkor a szavazók $0,3(x - 1)^2$ része nem hisz nekik, a maradék $1 - 0,3(x - 1)^2$ rész viszont elhiszi. Ezeknek csak a $0,5(x - 1)$ része fog ténylegesen rájuk szavazni, így a szavazatszám:

$$(1 - 0,3(x - 1)^2) \cdot 0,5(x - 1) = 0,5(x - 1) - 0,15(x - 1)^3$$

Látjuk, hogy kényelmesebb az $y = x - 1 \geq 0$ változóval számolni, így ezzel írjuk fel a függvényt:

$$f(y) = 0,5y - 0,15y^3$$

Populista Párt – folytatás

$$f(y) = 0,5y - 0,15y^3 \quad (y \geq 0)$$

függvény lokális szélsőértékeit keressük először:

$$f'(y) = 0,5 - 0,15 \cdot 3y^2 = 0,5 - 0,45y^2,$$

melynek nullhelye (figyelembe véve, hogy $y \geq 0$):

$$y_0 = \sqrt{\frac{0,5}{0,45}} = \frac{\sqrt{10}}{3},$$

A második derivált:

$$f''(y) = -0,45 \cdot 2y = -0,9y,$$

ami pozitív y esetén negatív, tehát $f''(y_0) < 0$, tehát ez lokális maximum.

A függvény értéke 0-ban: $f(0) = 0$, míg a végtelenben a határérték:

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} 0,5y - 0,15y^3 = \lim_{y \rightarrow +\infty} y^3 \left(0,5 \frac{1}{y^2} - 0,15 \right) = -\infty$$

Így y_0 -ban globális maximum van. Tehát az optimális x érték:

$$x_0 = y_0 + 1 = \frac{\sqrt{10}}{3} + 1 \approx 2,054.$$

Úszómedence

Fel szeretnénk tölteni a 10 000 literes uszúmedencénket a közeli kútról. Ehhez tetszőlegesen nagy vödrot használhatunk, de ha l literes vödrot használunk, akkor egy forduló $64 + l^2$ másodpercig tart. Mekkora vödrot használjunk, hogy a lehető leggyorsabban végezzünk?

Úszómedence

Fel szeretnénk tölteni a 10 000 literes úszómedencénket a közeli kútról. Ehhez tetszőlegesen nagy vödört használhatunk, de ha l literes vödört használunk, akkor egy forduló $64 + l^2$ másodpercig tart. Mekkora vödört használjunk, hogy a lehető leggyorsabban végezzünk?

Ha $l > 0$ literes vödört használunk, akkor $\frac{10\,000}{l}$ fordulóra van szükség, tehát a teljes feltöltés időtartama:

$$f(l) = \frac{10\,000}{l}(64 + l^2) = \frac{640\,000}{l} + 10\,000l.$$

Ennek a függvénynek keressük a minimumát.

A határértékek a széleken:

$$\lim_{l \rightarrow 0^+} f(l) = \lim_{l \rightarrow 0^+} \frac{640\,000}{l} + 10\,000l = +\infty$$

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} f(l) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{640\,000}{l} + 10\,000l = +\infty$$

Úszómedence – folytatás

Az $f(l) = \frac{640\,000}{l} + 10\,000l$ függvény deriváltja:

$$f'(l) = -\frac{640\,000}{l^2} + 10\,000,$$

melynek nullhelye:

$$\begin{aligned}f'(l) &= 0 \\-\frac{640\,000}{l^2} + 10\,000 &= 0 \\10\,000 &= \frac{640\,000}{l^2} \\10\,000l^2 &= 640\,000 \\l^2 &= 64 \\l &= 8\end{aligned}$$

A második derivált:

$$f''(l) = \frac{1280\,000}{l^3},$$

ami minden pozitív helyen, így az $l = 8$ -ban is pozitív. Tehát $l = 8$ -ban lokális minimum van. Ez egyben globális minimum is.