13. előadás

Középértéktételek és aszimptoták

Horváth Márton

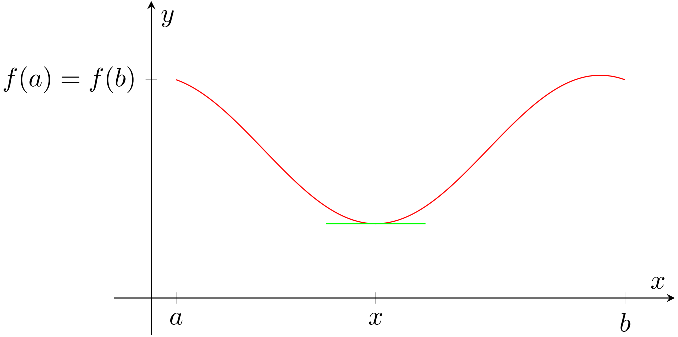
BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2021. október 27.

Rolle-tétel

Ha az $f(x)$ függvény az $[a,b]$ intervallumon folytonos, az (a,b)-n differenciálható, és $f(a)=f(b)$, akkor van olyan $x\in(a,b)$, hogy $f'(x)=0$ (az érintő vízszintes).

Bizonyítás:
A Weierstrass-tétel szerint a függvény felveszi a minimumát és a maximumát, ezek közül legalább az egyik belső pont. Ez lokális szélsőérték, így a derivált nulla.



Lagrange-tétel

Ha az $f(x)$ függvény az $[a,b]$ intervallumon folytonos, az (a,b)-n differenciálható, akkor van olyan $x \in (a,b)$, hogy

$$f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Bizonyítás:

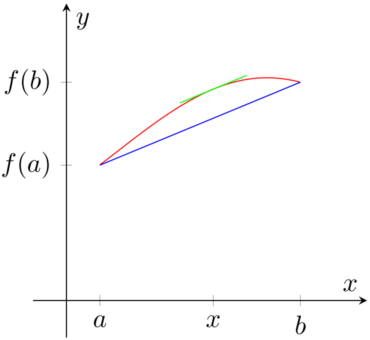
A Rolle-tételt alkalmazzuk az

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

függvényre.

$$0 = F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

és



$$F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(b) - (f(b)-f(a)) = f(a) = F(a)$$

Cauchy-tétel

Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvények az $[a,b]$ intervallumon folytonosak, az (a,b)-n differenciálhatóak és $g'(x) \neq 0$ $x \in (a,b)$ esetén, akkor van olyan $x \in (a,b)$, hogy

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Bizonyítás:
A Rolle-tételt alkalmazzuk az

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$$

függvényre.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x)$$

$$F(b) - F(a) = \left(f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(b) \right) - \left(f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(a) \right) =$$

$$= f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \left(g(b) - g(a) \right) = 0$$

Akikről eddig szó volt

Michel Rolle (1652–1719) francia

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) olasz-francia

Augustin Louis Cauchy (1789–1857) francia

Guillaume de l'Hospital (1661–1704) francia

Étienne Bézout (1730–1784) francia

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) német

Bernard Bolzano (1781–1848) szudétanémet

Karl Weierstrass (1815–1897) német

Aszimptoták

Az aszimptota olyan egyenes, melyet a függvény grafikonja tetszőlegesen megközelít.

Ez háromféle lehet:

- függőleges aszimptota
- vízszintes aszimptota
- ferde aszimptota

Függőleges aszimptota

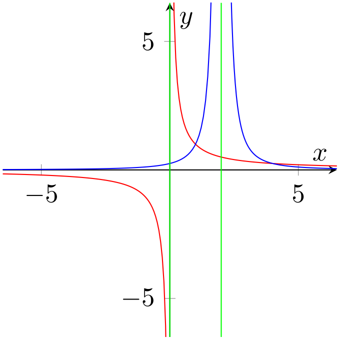
Az $f(x)$ függvénynek függőleges aszimptotája van az x_0 pontban, ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, esetleg csak az egyik oldali határérték.

Ekkor az $x = x_0$ egyenletű egyenes az aszimptota.

Példák:

Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvénynek az $x_0 = 0$ pontban függőleges aszimptotája van.
Egyenlete: $x = 0$.

Az $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ függvénynek az $x_0 = 2$ pontban függőleges aszimptotája van.
Egyenlete: $x = 2$.



Vízszintes aszimptota

Az $f(x)$ függvénynek vízszintes aszimptotája van, ha $\pm\infty$-ben a határértéke egy véges szám.

Ha $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, akkor az $y = a$ egyenletű egyenes a vízszintes aszimptota a $+\infty$-ben.

A $-\infty$-ben hasonlóan definiáljuk.

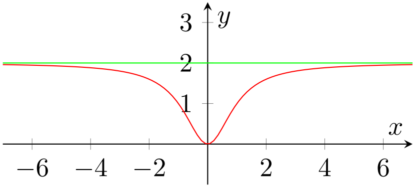
Példa:

Az $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ függvénynek a határértéke a végtelenben:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} = 2,$$

így az $y = 2$ egyenletű egyenes a vízszintes aszimptotája a $+\infty$-ben.

A $-\infty$-ben hasonlóan ugyanez az egyenes.



Ferde aszimptota

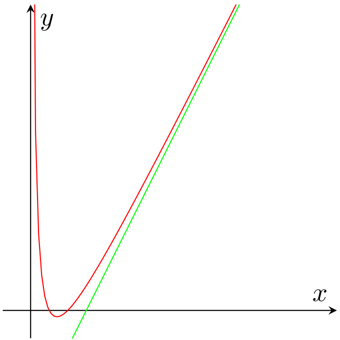
Az $f(x)$ függvénynek ferde aszimptotája van, ha a függvénygrafikon az $y = ax + b$ egyeneshez „simul” a végtelenben.

Az a és a b együtthatók kiszámítása:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax)$$

A $-\infty$-ben hasonlóan számítható.

Ha valamelyik határérték nem létezik vagy végtelen, akkor nincs ferde aszimptota.



Az a értékét gyakran a L'Hospital-szabály segítségével számolhatjuk ki:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \rightsquigarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to\infty} f'(x)$$

Ferde aszimptota – példák

Az $f(x) = \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{x}$ függvény ferde aszimptotái

Ferde aszimptota – példák

Az $f(x) = \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{x}$ függvény ferde aszimptotái

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2-6x+4}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{6}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = 2$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2 - 6x + 4}{x} - 2x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 6x + 4 - 2x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-6x + 4}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(-6 + \frac{4}{x}\right) = -6$$

Tehát a ferde aszimptota egyenlete: $y = 2x - 6$.
Hasonlóan a $-\infty$-ben is.

Az $f(x) = x^2$ függvény ferde aszimptotái

Ferde aszimptota – példák

Az $f(x) = \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{x}$ függvény ferde aszimptotái

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2-6x+4}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{6}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = 2$$
$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2 - 6x + 4}{x} - 2x\right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 6x + 4 - 2x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-6x + 4}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(-6 + \frac{4}{x}\right) = -6$$

Tehát a ferde aszimptota egyenlete: $y = 2x - 6$.
Hasonlóan a $-\infty$-ben is.

Az $f(x) = x^2$ függvény ferde aszimptotái

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} x = +\infty,$$

tehát ebben az esetben nem létezik ferde aszimptota.