14. előadás

Konvexitás és függvényvizsgálat

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

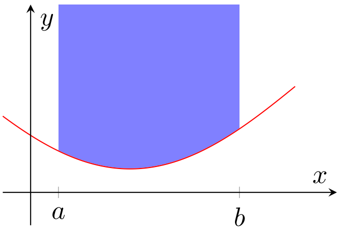
2021. november 3.

Konvexitás

Egy $K \subseteq \mathbb{R}^2$ halmaz konvex, ha bármely $P, Q \in K$ pontra a PQ szakasz teljes egészében benne van a K-ban.

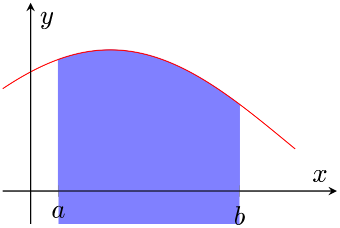
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $[a, b] \subseteq D_f$ intervallumon konvex, ha a grafikonja feletti tartomány konvex:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ és } y \geq f(x)\}$$



Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $[a, b] \subseteq D_f$ intervallumon konkáv, ha a grafikonja alatti tartomány konvex:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ és } y \leq f(x)\}$$



Ekvivalens tulajdonságok a konvexitásra

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $[a,b] \subseteq D_f$ intervallumon pontosan akkor konvex, ha

- minden $x, y \in [a,b]$-re az $(x, f(x))$ és az $(y, f(y))$ pontokat összekötő szakasz a grafikon felett van, azaz

  $$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda) y) \qquad \text{minden } \lambda \in [0,1]\text{-re.}$$

- a függvénygrafikon az érintő felett halad, azaz

  $$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{minden } x, x_0 \in [a,b] \text{ esetén.}$$

- az érintő meredeksége, azaz $f'(x)$ monoton nő az $[a,b]$ intervallumon.
- $f''(x) \geq 0$ az $[a,b]$ intervallumon.

Ekvivalens tulajdonságok a konkávitásra

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $[a,b] \subseteq D_f$ intervallumon pontosan akkor konkáv, ha

- minden $x, y \in [a,b]$-re az $(x, f(x))$ és az $(y, f(y))$ pontokat összekötő szakasz a grafikon alatt van, azaz

  $$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \leq f(\lambda x + (1-\lambda) y) \qquad \text{minden } \lambda \in [0,1]\text{-re.}$$

- a függvénygrafikon az érintő alatt halad, azaz

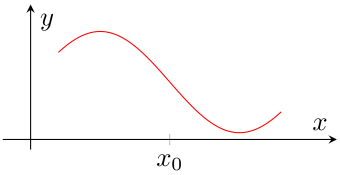
  $$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{minden } x, x_0 \in [a,b] \text{ esetén.}$$

- az érintő meredeksége, azaz $f'(x)$ monoton csökken az $[a,b]$ intervallumon.
- $f''(x) \leq 0$ az $[a,b]$ intervallumon.

Inflexiós pont

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) $x_0 \in D_f$ pontja inflexiós pont, ha a függvény x_0-ban differenciálható, és a függvény x_0-ban konvexitást vált, azaz előtte konkáv, utána konvex vagy fordítva.

Formálisan: van olyan $\delta > 0$, hogy $[x_0 - \delta, x_0]$-ban konkáv és $[x_0, x_0 + \delta]$-ban konvex vagy fordítva.



Példa:
A $\sin x$ függvénynek a π egész számú többszörösei az inflexiós pontjai.

Tétel:
Ha az x_0 inflexiós pont, akkor $f''(x_0) = 0$.

Ez visszafelé nem feltétlenül igaz:

$$f(x) = x^4$$
$$f'(x) = 4x^3$$
$$f''(x) = 12x^2 \text{ így } f''(0) = 0,$$

de a 0 nem inflexiós pont (a függvény mindenütt konvex).

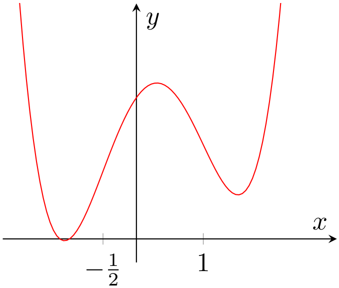
Egy példa

Az $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 3$ függvény konvexitása.

Egy példa

Az $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 3$ függvény konvexitása.
Kiszámoljuk a függvény második deriváltját:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 3 \\
f'(x) &= 4x^3 - 3x^2 - 6x + 2 \\
f''(x) &= 12x^2 - 6x - 6
\end{aligned}
$$



A második derivált nullhelyei:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= 0 \\
12x^2 - 6x - 6 &= 0 \\
2x^2 - x - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

A második derivált előjeléből leolvashatjuk a konvexitást:

	$x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 1$	1	$1 < x$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	konvex	inf. pont	konkáv	inf. pont	konvex

Függvényvizsgálat

Adott egy $f(x)$ függvény, megállapítjuk:

- értelmezési tartomány
- zérushely
- paritás
- periodicitás
- értelmezési tartomány szélein határértékek
  - aszimptoták
- első derivált
  - monotonitási tulajdonságok
  - lokális szélsőértékek
- második derivált
  - konvexitás
  - inflexiós pontok
- sematikus ábrázolás
- értékkészlet

Az e^{-x^2} függvény vizsgálata

Legyen $f(x) = e^{-x^2}$ (Gauss- vagy haranggörbe).

Az e^{-x^2} függvény vizsgálata

Legyen $f(x) = e^{-x^2}$ (Gauss- vagy haranggörbe).

- értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$
- zérushely: nincs, mindenütt pozitív
- paritás:
  $$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x),$$
  tehát páros
- periodicitás: nem periodikus (visszatérünk)
- értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} e^{-x^2} = 0, \text{ mert } \lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{-x^2} = 0$$

Így vízszintes aszimptota van a $\pm\infty$-ben: $y = 0$ egyenes.

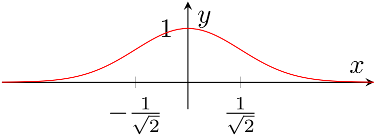
Az e^{-x^2} függvény vizsgálata – folytatás

- első derivált:
$$f'(x) = e^{-x^2}(-2x),$$
melynek 0-ban van nullhelye

	$x < 0$	0	$0 < x$
f'	$+$	0	$-$
f	monoton nő	lok. max.	monoton csökken

Az $x = 0$-ban lokális maximum van, melynek értéke: $f(0) = e^0 = 1$.
- második derivált:
$$f''(x) = e^{-x^2}(-2x)(-2x) + e^{-x^2}(-2) = (4x^2 - 2)e^{-x^2},$$
melynek nullhelyei: $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

	$x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} < x$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	konvex	inf. pont	konkáv	inf. pont	konvex



- értékkészlet: $(0, 1]$