

15. előadás

Függvényvizsgálat

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2021. november 8.

Függvényvizsgálat

Adott egy $f(x)$ függvény, megállapítjuk:

- ▶ értelmezési tartomány
- ▶ zérushely
- ▶ paritás
- ▶ periodicitás
- ▶ értelmezési tartomány szélein határértékek
 - ▶ aszimptoták
- ▶ első derivált
 - ▶ monotonitási tulajdonságok
 - ▶ lokális szélsőértékek
- ▶ második derivált
 - ▶ konvexitás
 - ▶ inflexiós pontok
- ▶ szemantikus ábrázolás
- ▶ értékkészlet

$$f(x) = x^3 - 3x - 2$$

$$f(x) = x^3 - 3x - 2$$

- ▶ értelmezési tartomány: \mathbb{R}
- ▶ zérushely: racionális gyökök csak a 2 osztói lehetnek: $\pm 1, \pm 2$, melyek közül 2 és a -1 gyök, utóbbi kétszeres. Így a függvény szorzat alakja:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2(x - 2)$$

- ▶ paritás:

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) - 2 = -x^3 + 3x - 2 = -f(x) - 4,$$

tehát (valószínűleg) nincs paritása, hivatkozhatunk a nullhelyekre is (nem szimmetrikusak az origóra), vagy $f(1) = -4$ és $f(-1) = 0$ se nem egyenlőek, se nem ellentettek.

- ▶ periodicitás: nem periodikus (véges sok nullhely)

$$f(x) = x^3 - 3x - 2$$

- értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 3x - 2 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = -\infty$$

Ferde aszimptota van-e?

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - 3 - \frac{2}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = +\infty, \end{aligned}$$

így nincs ferde aszimptota a $+\infty$ -ben.

Hasonló számolással kapjuk, hogy a $-\infty$ -ben sincsen.

$$f(x) = x^3 - 3x - 2$$

- első derivált: $f'(x) = 3x^2 - 3$,
melynek $x^2 = 1$ esetén, azaz ± 1 -ben van nullhelye

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	+	0	-	0	+
f	nő	max	csökken	min	nő

Tehát a -1 lokális maximumhely, értéke: $f(-1) = 0$,
míg az 1 lokális minimumhely, értéke: $f(1) = -4$.

- második derivált: $f''(x) = 3 \cdot 2x = 6x$, melynek nullhelye a 0 .

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f''	-	0	+
f	konkáv	inf. pont	konvex

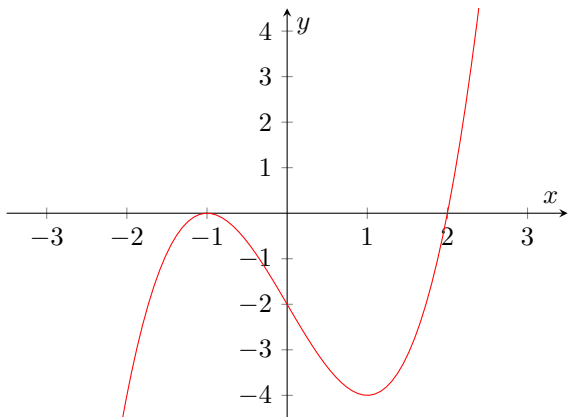
Ugyanezek egyetlen táblázatban:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	+	0	-		0	+	
	nő	max	csökken		min	nő	
f''	-		0		+		
	konkáv		inf. pont		konvex		

$$f(x) = x^3 - 3x - 2$$

A táblázat:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	+	0		-		0	+
	nő	max		csökken		min	nő
f''		-		0		+	
		konkáv		inf. pont		konvex	



► értékészlet: \mathbb{R}

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$$

- ▶ értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- ▶ zérushely: $x^3 + 1 = 0$ esetén, azaz $x = -1$.
- ▶ paritás: nincsen, hiszen ha lenne, akkor 1 is nullhely lenne.
- ▶ periodicitás: nem periodikus (csak egy nullhely)
- ▶ értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + 1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + 1}{x^2} = +\infty$$

Tehát az $x = 0$ -ban függőleges aszimptota van.

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$$

- értelmezési tartomány szélein határértékek (folytatás):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x + \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \frac{1}{x^2} = -\infty$$

Ferde aszimptota van-e?

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3+1}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x^3} = 1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3+1}{x^2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+1-x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{aligned}$$

így az $y = x$ egyenletű egyenes a ferde aszimptota a $+\infty$ -ben.

Hasonló számolással kapjuk, hogy a $-\infty$ -ben is az $y = x$ egyenletű egyenes a ferde aszimptota.

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$$

► első derivált:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3 + 1) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{3x^4 - 2x^4 - 2x}{(x^2)^2} = \frac{x^4 - 2x}{x^4} = \frac{x^3 - 2}{x^3},$$

melynek $\sqrt[3]{2}$ -ben van nullhelye.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$
f'	+	n. é.	-	0	+
f	↗	n. é.	↘	min	↗

Tehát a $\sqrt[3]{2}$ lokális minimumhely, értéke:

$$f(\sqrt[3]{2}) = \frac{(\sqrt[3]{2})^3+1}{(\sqrt[3]{2})^2} = 3 \cdot 2^{-\frac{2}{3}} \approx 1,89.$$

► második derivált:

$$f''(x) = \frac{3x^2 \cdot x^3 - (x^3 - 2) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{3x^5 - (3x^5 - 6x^2)}{x^6} = \frac{6x^2}{x^6} = \frac{6}{x^4},$$

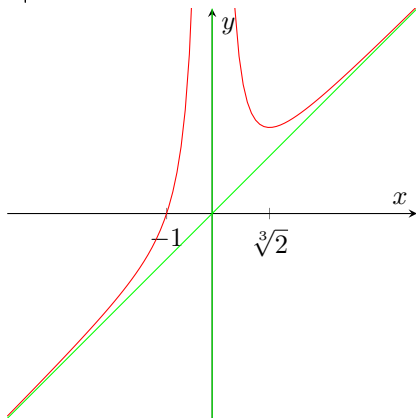
melynek nincs nullhelye.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f''	+	n. é.	+
f	∪	n. é.	∪

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$$

► Az előzőek egyetlen táblázatban:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$
f'	+	n. é.	-	0	+
f	↗	n. é.	↘	min	↗
f''	+	n. é.		+	
f	∪	n. é.		∩	



► értékészlet: \mathbb{R}

$$f(x) = x - \operatorname{arctg} x$$

$$f(x) = x - \operatorname{arctg} x$$

- ▶ értelmezési tartomány: \mathbb{R}
- ▶ zérushely: $x = 0$ -ban zérus a függvény, más nullhely nincs, mert látni fogjuk, hogy szigorúan monoton nő.
- ▶ paritás: páratlan (felhasználva, hogy az arctg függvény páratlan):

$$f(-x) = -x - \operatorname{arctg}(-x) = -x - (-\operatorname{arctg} x) = -f(x)$$

- ▶ periodicitás: nem periodikus (csak egy zérushely)

$$f(x) = x - \operatorname{arctg} x$$

- értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \operatorname{arctg} x = +\infty \text{ (mert az arctg függvény korlátos)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x - \operatorname{arctg} x = -\infty \text{ (mert az arctg függvény korlátos)}$$

aszimptoták (ferde aszimptoták lehetnek):

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow \infty} x - \operatorname{arctg} x - x = \lim_{x \rightarrow \infty} -\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$$

Tehát az aszimptota egyenlete a $+\infty$ -ben $y = x - \frac{\pi}{2}$.

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \operatorname{arctg} x - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

Tehát az aszimptota egyenlete a $-\infty$ -ben $y = x + \frac{\pi}{2}$.

$$f(x) = x - \operatorname{arctg} x$$

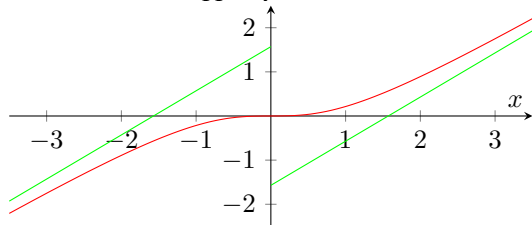
► első és második derivált:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x(1+x^2) - x^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x + 2x^3 - 2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

	$x < 0$	0	$0 < x$
f'	+	0	+
f	monoton nő	–	monoton nő
f''	–	0	+
f	konkáv	i.p.	konvex

A 0-ban nincs lokális szélsőérték, a függvény monoton nő \mathbb{R} -en.



► értékészlet \mathbb{R}