16. előadás

Integrálszámítás

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2021. november 10.

Primitív függvény

Az $F(x)$ függvény az $f(x)$ függvény primitív függvénye az I intervallumon, ha $F'(x) = f(x)$ teljesül minden $x \in I$-re.
Szokás antideriváltnak is nevezni.

Általában a megfelelő nagybetűvel jelöljük a primitív függvényt.

Példa:
$f(x) = 3x^2$ esetén $F(x) = x^3$ vagy $F(x) = x^3 + 1$ vagy $F(x) = x^3 + 2$, igazándiból bármilyen $C \in \mathbb{R}$-re $F(x) = x^3 + C$ jó.

Tétel:
Ha $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ az I intervallumon, akkor van olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy $F_1(x) = F_2(x) + C$.

Ezt a tételt a Lagrange-féle középértéktétellel lehet bizonyítani.
(Csak azt kell megmutatni, hogy $(F_1 - F_2)'(x) = 0$-ból következik, hogy $F_1 - F_2$ konstans.)

Tétel:
Ha az $f(x)$ függvény folytonos, akkor van primitív függvénye.
Csak kérdés, hogy fel tudjuk-e írni:
Az $f(x) = e^{-x^2}$ függvénynek van primitív függvénye, de nem tudjuk felírni az általunk ismert függvényekkel.

Határozatlan integrál

Az f függvény primitív függvényeinek összességét határozatlan integrálnak nevezzük,
jelölése: $\displaystyle\int f(x)\ \mathrm{d}x$.

Példa:

$$\int 3x^2\ \mathrm{d}x = \left\{x^3 + C \mid C \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= x^3 + C$$

Műveleti tulajdonságok

Tétel:

$$\int f(x) + g(x)\ \mathrm{d}x = \int f(x)\ \mathrm{d}x + \int g(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\int f(x) - g(x)\ \mathrm{d}x = \int f(x)\ \mathrm{d}x - \int g(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\int cf(x)\ \mathrm{d}x = c\int f(x)\ \mathrm{d}x \qquad c \in \mathbb{R}$$

Sajnos szorzásra, hányadosra nincs ilyen egyszerű szabály.

Elemi függvények integráljai

Mivel $(x)' = 1$, így $\int 1 \, \mathrm{d}x = x + C$.

$(x^n)' = nx^{n-1}$, így

$$\int nx^{n-1} \, \mathrm{d}x = x^n + C$$

$$\int x^{n-1} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n}x^n + C, \qquad \text{ha } n \neq 0$$

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \qquad \text{ha } n \neq -1$$

Tudjuk, hogy $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, ha $x > 0$, így

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln x + C, \qquad \text{ha } x > 0$$

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln |x| + C, \qquad \text{ha } x \neq 0$$

Elemi függvények integráljai – táblázat

$f(x)$	$\int f(x)\ \mathrm{d}x$	
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \neq 1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$
$\cos x$	$\sin x + C$	
$\sin x$	$-\cos x + C$	
e^x	$e^x + C$	
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x + C$	
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + C$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	$\lvert x\rvert < 1$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \; \mathrm{d}x =$$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \ \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + C$$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + C$$

$$\int x^2 \sqrt{x} \, \mathrm{d}x =$$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + C$$

$$\int x^2\sqrt{x} \, \mathrm{d}x = \int x^{2,5} \, \mathrm{d}x = \frac{x^{3,5}}{3,5} + C = \frac{2}{7}x^{3,5} + C$$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$$f'(x) = \cos x \quad \text{és} \quad f(0) = 5.$$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$$f'(x) = \cos x \quad \text{és} \quad f(0) = 5.$$

$$f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sin x + C$$

$$f(0) = \sin 0 + C = C \quad \Rightarrow \quad C = 5$$

$$f(x) = \sin x + 5$$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$$f''(x) = x \quad \text{és} \quad f'(2) = 1 \quad \text{és} \quad f(1) = 0.$$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$$f''(x) = x \quad \text{és} \quad f'(2) = 1 \quad \text{és} \quad f(1) = 0.$$

$$f''(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$f'(2) = \frac{2^2}{2} + C_1 = 2 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -1$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} - 1$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - x + C_2 = \frac{x^3}{6} - x + C_2$$

$$f(1) = \frac{1}{6} - 1 + C_2 = -\frac{5}{6} + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{5}{6}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - x + \frac{5}{6}$$