17. előadás

Lineáris helyettesítés és parciális törtekre bontás

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2021. november 15.

Bevezető feladatok

$$\int \cos(2x)\ \mathrm{d}x =$$

Bevezető feladatok

$$\int \cos(2x)\ \mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2.$

Bevezető feladatok

$$\int \cos(2x)\ \mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2$.

$$\int \sin^2(x)\ \mathrm{d}x =$$

Bevezető feladatok

$$\int \cos(2x)\ \mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2$.

$$\int \sin^2(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

Bevezető feladatok

$$\int \cos(2x)\ \mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2.$

$$\int \sin^2(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x-2}\ \mathrm{d}x =$$

Bevezető feladatok

$$\int \cos(2x)\ \mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2.$

$$\int \sin^2(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x-2}\ \mathrm{d}x = \ln|x-2| + C$$

Bevezető feladatok

$$\int \cos(2x)\ \mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2$.

$$\int \sin^2(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x-2}\ \mathrm{d}x = \ln|x-2| + C$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2}\ \mathrm{d}x =$$

Bevezető feladatok

$$\int \cos(2x)\ \mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2.$

$$\int \sin^2(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x-2}\ \mathrm{d}x = \ln|x-2| + C$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2}\ \mathrm{d}x = \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x-2} + C$$

Bevezető feladatok

$$\int \cos(2x)\ \mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2.$

$$\int \sin^2(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x-2}\ \mathrm{d}x = \ln|x-2| + C$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2}\ \mathrm{d}x = \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x-2} + C$$

$$\int (2x-3)^{100}\ \mathrm{d}x =$$

Bevezető feladatok

$$\int \cos(2x)\ \mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2$.

$$\int \sin^2(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x-2}\ \mathrm{d}x = \ln|x-2| + C$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2}\ \mathrm{d}x = \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x-2} + C$$

$$\int (2x-3)^{100}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-3)^{101}}{101} + C = \frac{(2x-3)^{101}}{202} + C$$

Lineáris helyettesítés

Tétel (Lineáris helyettesítés):
Ha az $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$, akkor

$$\int f(ax+b)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

Bizonyítás:

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b)+C\right)' = \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot a = f(ax+b)$$

Példa:

$$\int \sin(5x-7)\ \mathrm{d}x =$$

Lineáris helyettesítés

Tétel (Lineáris helyettesítés):
Ha az $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$, akkor

$$\int f(ax+b)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

Bizonyítás:

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b)+C\right)' = \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot a = f(ax+b)$$

Példa:

$$\int \sin(5x-7)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{5}(-\cos(5x-7))+C = -\frac{\cos(5x-7)}{5}+C$$

$a=5$, $b=-7$, $f(x)=\sin x$, $F(x)=-\cos x$

Két bevezető feladat

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x-2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x^2-2x-1)(x-2)+3}{x-2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int x^2 - 2x - 1 + \frac{3}{x-2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x^3}{3} - x^2 - x + 3\ln|x-2| + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(1-x)(1+x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\ln|1-x| + \ln|1+x|\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

Lehetett volna az arth ($|x| < 1$ esetén) vagy az arcth ($|x| > 1$ esetén) függvényeket is használni, de a fenti metódus általánosabb módszer.

Parciális törtekre bontás

Két polinom hányadosát integráljuk.

1. Polinomosztással elérjük, hogy a számláló kisebb fokú legyen, mint a nevező.
2. A nevezőt felbontjuk legfeljebb másodfokú irreducibilis polinomok szorzatára.
3. A törtet felírjuk egyszerűbb törtek összegeként.
4. Ezeket a törteket már tudjuk integrálni.

Példa:

$$\frac{5x^3 - 6x^2 + 43x - 44}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 14x + 9} = \frac{2}{x+1} - \frac{7}{(x+1)^2} + \frac{3x+1}{x^2 - 4x + 9},$$

mert $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 14x + 9 = (x+1)^2(x^2 - 4x + 9)$.

Másodfokú nevezőjű integrálása

Először teljes négyzetté alakítjuk a nevezőt: $x^2 - 4x + 9 = (x-2)^2 + 5$.

$$\frac{3x+1}{x^2-4x+9} = \frac{3(x-2)+7}{(x-2)^2+5} = \frac{3(x-2)}{(x-2)^2+5} + \frac{7}{(x-2)^2+5}$$

Az első tag integrálása:

$$\int \frac{3(x-2)}{(x-2)^2+5}\, \mathrm{d}x = \int \frac{3}{2}\frac{1}{(x-2)^2+5} \cdot 2(x-2)\, \mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left((x-2)^2+5\right) + C$$

A második tagé:

$$\int \frac{7}{(x-2)^2+5}\, \mathrm{d}x = \int \frac{7}{5}\frac{1}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right)^2+1}\, \mathrm{d}x = \frac{7}{5}\sqrt{5}\mathrm{arctg}\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right) + C$$

Így tehát:

$$\int \frac{x+3}{x^2-4x+9}\, \mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left((x-2)^2+5\right) + \frac{7\sqrt{5}}{5}\mathrm{arctg}\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right) + C$$

Egy parciális törtekre bontás

$$\int \frac{x+5}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x = ?$$

Először felbontjuk a nevezőt:

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

Ekkor a törtet ilyen alakban szeretnénk előállítani:

$$\frac{x+5}{x^2-x-6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2},$$

ahol $A, B \in \mathbb{R}$. Ezeknek a meghatározásához beszorzunk a nevezővel:

$$x + 5 = A(x+2) + B(x-3)$$

A két oldalon álló polinom együtthatói megegyeznek:

$$\begin{aligned} 1 &= A + B \\ 5 &= 2A - 3B \end{aligned}$$

Ebből az egyenletrendszerből azt kapjuk, hogy $A = \frac{8}{5}$ és $B = -\frac{3}{5}$. Tehát:

$$\int \frac{x+5}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x = \int \frac{8}{5}\frac{1}{x-3} - \frac{3}{5}\frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{5}\ln|x-3| - \frac{3}{5}\ln|x+2| + C$$

Feladat

$$\int \frac{x+1}{2+3x^2}\ \mathrm{d}x =$$

Feladat

$$\int \frac{x+1}{2+3x^2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{x}{2+3x^2} + \frac{1}{2+3x^2}\ \mathrm{d}x$$

Az első tag integrálása:

$$\int \frac{x}{2+3x^2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{6}\frac{1}{2+3x^2} \cdot 6x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\ln\left(2+3x^2\right) + C$$

Míg a másodiké:

$$\int \frac{1}{2+3x^2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{3}{2}x^2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x\right)^2}\ \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x\right) + C$$

Tehát a kérdéses integrál:

$$\int \frac{x+1}{2+3x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\ln(2+3x^2) + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x\right) + C$$