2. előadás

Középiskolás anyag ismétlése: függvényábrázolás, koordinátageometria

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2021. szeptember 8.

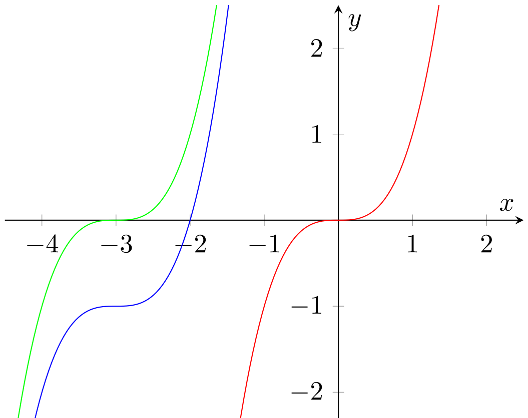
Függvényábrázolás

Ábrázoljuk az $f(x) = (x+3)^3 - 1$ függvény grafikonját.

A $h(x) = (x+3)^3$ függvény grafikonját a $g(x) = x^3$ függvény grafikonjának 3 egységgel való balra tolásával kapjuk.

Általánosan: ha az x-hez hozzáadunk (levonunk) x_1-et, akkor a grafikont x_1-gyel balra (jobbra) toljuk.

Végül az $f(x) = (x+3)^3 - 1$ függvény grafikonját a h függvény grafikonjának 1-gyel való lefelé tolásával kapjuk.



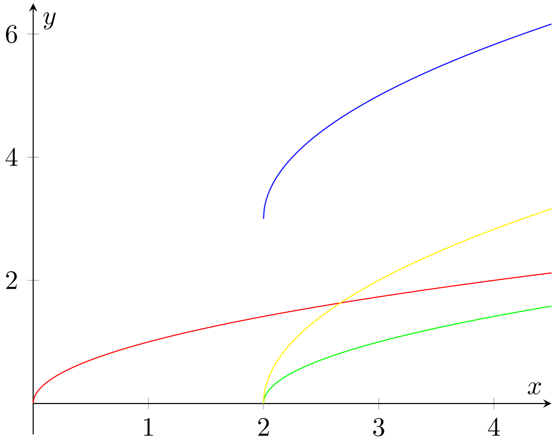
Függvényábrázolás

Ábrázoljuk az $f(x) = 2\sqrt{x-2} + 3$ függvény grafikonját.

Függvényábrázolás

Ábrázoljuk az $f(x) = 2\sqrt{x-2} + 3$ függvény grafikonját.

Hasonlóan az előzőhöz: A $\sqrt{x}$ grafikonját 2 egységgel jobbra tolva kapjuk a $\sqrt{x-2}$ függvény grafikonját. Ennek a $2\sqrt{x-2}$ a kétszerese, tehát ezt meg kell egy kicsit nyújtanunk, és végül 3-mal való feltolással kapjuk a $2\sqrt{x-2} + 3$ grafikonját.



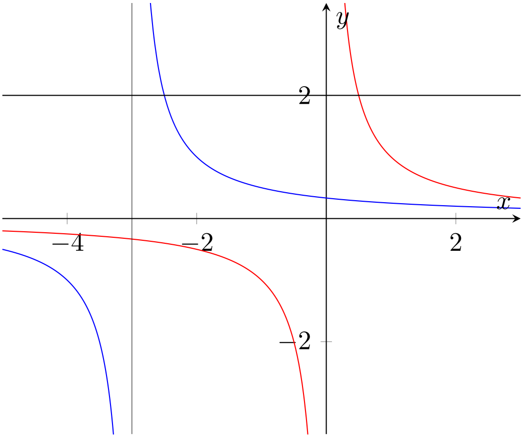
Egy tegnapelőtti feladat

Oldjuk meg *grafikusan* az $\dfrac{1}{x+3} \le 2$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

Egy tegnapelőtti feladat

Oldjuk meg *grafikusan* az $\dfrac{1}{x+3} \leq 2$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

Az $\dfrac{1}{x+3}$ grafikonját az ismert $\dfrac{1}{x}$ grafikonból eltolással kaphatjuk:



Még egy egyenlőtlenség

Oldjuk meg az $x^2 + 2x > 3$ egyenlőtlenséget.

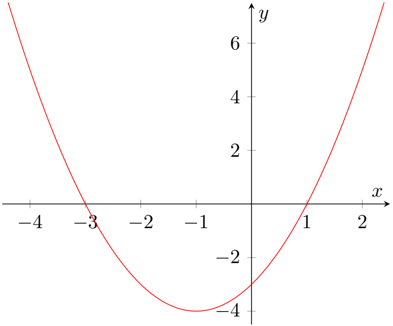
Még egy egyenlőtlenség

Oldjuk meg az $x^2 + 2x > 3$ egyenlőtlenséget.

Teljes négyzetté alakítással:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &> 3 \\ (x+1)^2 - 1 &> 3 \\ (x+1)^2 &> 4 \\ |x+1| &> 2 \\ x+1 < -2 \quad \text{vagy} &\quad x+1 > 2 \\ x < -3 \quad \text{vagy} &\quad x > 1 \end{aligned}$$

azaz $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.



Másik lehetőség: az $x^2 + 2x - 3$ függvény grafikonja egy parabola (mivel másodfokú), mely felfelé nyílik (mivel pozitív a főegyüttható).
A nullhelyektől balra, illetve jobbra vannak a megfelelő értékek:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix}$$

Házi feladat

Oldjuk meg az $-x^2 + 3x > 2$ egyenlőtlenséget.

Házi feladat

Oldjuk meg az $-x^2 + 3x > 2$ egyenlőtlenséget.

Megoldás: $x \in (1, 2)$.

Egyenesek egyenlete

Írjuk fel a $P(1, 2)$ és a $Q(3, 4)$ ponton átmenő egyenes egyenletét.

Egyenesek egyenlete

Írjuk fel a $P(1,2)$ és a $Q(3,4)$ ponton átmenő egyenes egyenletét.

Az egyenes *meredeksége*: 2 egységet emelkedünk, míg 2 egységet megyünk jobbra, e kettő hányadosa a meredekség: 1.

Általában a $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$ által meghatározott egyenes meredeksége $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Tehát az egyenes *egyenlete* $y = 1 \cdot x + b$, ahol a b számot úgy kell meghatározni, hogy a pontjaink kielégítsék ezt az egyenletet. $b = 1$.

Általában $y - y_1 = m(x - x_1)$, ahol $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Egyenesek egyenlete

Írjuk fel a $P(5,1)$ és a $Q(2,3)$ ponton átmenő egyenes egyenletét.

Egyenesek egyenlete

Írjuk fel a $P(5,1)$ és a $Q(2,3)$ ponton átmenő egyenes egyenletét.

$x_1 = 5, y_1 = 1, x_2 = 2, y_2 = 3$.

A meredekség: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{3-1}{2-5} = -\dfrac{2}{3}$.

Az egyenes egyenlete:

$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
y - 1 &= -\frac{2}{3}(x - 5) \\
y &= -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}.
\end{aligned}
$$

Egyenesek egyenlete

Írjuk fel a $P(5,1)$ és a $Q(2,3)$ ponton átmenő egyenes egyenletét.

$x_1 = 5, y_1 = 1, x_2 = 2, y_2 = 3$.

A meredekség: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{3-1}{2-5} = -\dfrac{2}{3}$.

Az egyenes egyenlete:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 1 &= -\frac{2}{3}(x-5) \\ y &= -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}. \end{aligned}$$

Hogyan jellemezhetőek az egyenes alatti és feletti pontok?

Egyenes alatti pontok: $y < -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{13}{3}$.

Egyenes feletti pontok: $y > -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{13}{3}$.

Négyzet egyenlőtlenségekkel

Jellemezzük a $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ pontok által meghatározott négyzet belsejében levő pontokat egyenlőtlenségekkel.

Négyzet egyenlőtlenségekkel

Jellemezzük a $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ pontok által meghatározott négyzet belsejében levő pontokat egyenlőtlenségekkel.

Írjuk fel a négyzet oldalegyeneseinek egyenletét!

$(0,0),(0,1)$: ez az y tengely, egyenlete $x=0$ (meredeksége végtelen); ettől jobbra levő pontok: $x>0$.

$(0,0),(1,0)$ ez az x tengely, egyenlete $y=0$ (meredeksége 0); felette levő pontok: $y>0$.

$(1,0),(1,1)$ ennek egyenlete $x=1$ (meredeksége végtelen); ettől balra levő pontok: $x<1$.

$(0,1),(1,1)$ ennek egyenlete $y=1$ (meredeksége 0); alatta levő pontok: $y<1$.

Tehát a négyzet belső pontjai: $0<x<1$ és $0<y<1$ egyenlőtlenségeket egyszerre kielégítő pontok.

Fordított kérdés

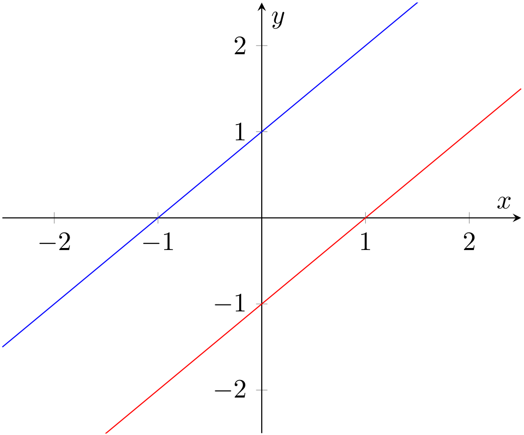
A sík mely (x, y) pontjaira igaz, hogy $|x - y| = 1$?

Fordított kérdés

A sík mely (x, y) pontjaira igaz, hogy $|x - y| = 1$?

Két eset lehetséges: $x - y = +1$ vagy $x - y = -1$.

Az első esetben: $y = x - 1$ egy 1 meredekségű egyenes, míg a második esetben $y = x + 1$ szintén.



Módosított fordított kérdés

A sík mely (x, y) pontjaira igaz, hogy $|x - y| \leq 1$?

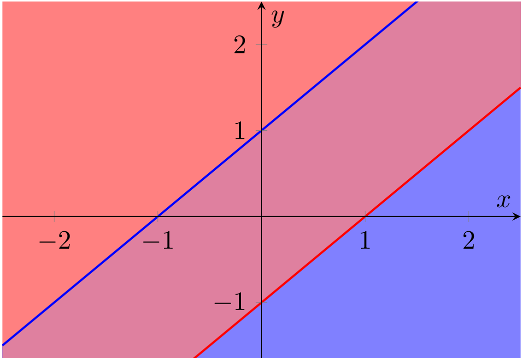
Módosított fordított kérdés

A sík mely (x, y) pontjaira igaz, hogy $|x - y| \leq 1$?

Ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} -1 \leq x - y \quad &\text{és} \quad x - y \leq 1 \\ y \leq x + 1 \quad &\text{és} \quad x - 1 \leq y, \end{aligned}$$

azaz az $y = x + 1$ egyenletű egyenes alatti pontok, illetve a $y = x - 1$ feletti pontok halmazának metszete, azaz a két egyenes közötti pontok halmaza.



Kör egyenlete

Az (x, y) pont távolsága az origótól $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Origó középpontú, r sugarú kör egyenlete: $x^2 + y^2 = r^2$.

Ha (a, b) a középpont: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Példa: $(2, -1)$ középpontú, 3 sugarú kör egyenlete:

$$\begin{aligned}
(x-2)^2 + (y+1)^2 &= 3^2 \\
x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 &= 9 \\
x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 &= 0
\end{aligned}$$

Milyen alakzat az $x^2 - 6x + y^2 - 4y - 3 = 0$ egyenletet kielégítő pontok halmaza?

Kör egyenlete

Az (x, y) pont távolsága az origótól $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Origó középpontú, r sugarú kör egyenlete: $x^2 + y^2 = r^2$.

Ha (a, b) a középpont: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Példa: $(2, -1)$ középpontú, 3 sugarú kör egyenlete:

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (y+1)^2 &= 3^2 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 &= 9 \\ x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Milyen alakzat az $x^2 - 6x + y^2 - 4y - 3 = 0$ egyenletet kielégítő pontok halmaza?

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + y^2 - 4y - 3 &= 0 \\ (x-3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 - 3 &= 0 \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 &= 16 \end{aligned}$$

Ez egy $(3, 2)$ középpontú, 4 sugarú kör.

Ábrázolás

Ábrázoljuk a síkon azon (x, y) koordinátájú pontok mértani helyét, melyekre

$$x^2 + 6x + y^2 - 2y > -6 \quad \text{és} \quad |x+3| < 1$$

egyidejűleg teljesül.

Ábrázolás

Ábrázoljuk a síkon azon (x, y) koordinátájú pontok mértani helyét, melyekre

$$x^2 + 6x + y^2 - 2y > -6 \quad \text{és} \quad |x + 3| < 1$$

egyidejűleg teljesül.

Az első egyenlőtlenség:

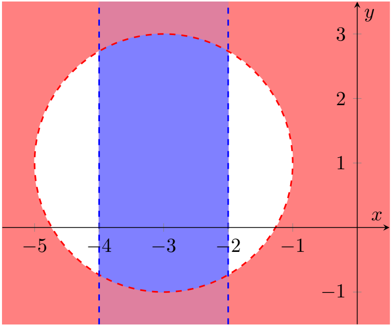
$$\begin{aligned} x^2 + 6x + y^2 - 2y &> -6 \\ (x+3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 &> -6 \\ (x+3)^2 + (y-1)^2 &> 4, \end{aligned}$$

ami a $(-3, 1)$ középpontú, 2 sugarú kör külseje.

A második egyenlőtlenséggel ekvivalens:

$$\begin{aligned} -1 < x + 3 < 1 \\ -4 < x < -2, \end{aligned}$$

ami az $x = -4$ és az $x = -2$ függőleges egyenesek közötti rész.



Mindkettő egyenlőtlenségnek teljesülnie kell, így a meghatározott részek metszete kell.