3. előadás

Polinomok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2021. szeptember 13.

Definíció

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

polinom foka: n (feltéve $a_n \neq 0$)
jelölése: $\deg p = n$
a_n főegyüttható
a_0 konstans tag

Speciális esetek:
$p(x) \equiv 0$ nullpolinom ($\deg = -\infty$ vagy -1)
$p(x) \equiv c$ konstans polinom ($\deg = 0$ feltéve, hogy $c \neq 0$)
$p(x) = ax + b$ lineáris polinom (feltéve $a \neq 0$) ($\deg = 1$)

Polinom nullhelye vagy gyöke: az az x_0 szám, melyre $p(x_0) = 0$.

Algebra alaptétele:
Minden legalább elsőfokú polinomnak van gyöke a komplex számok körében.
Azaz egy n-edfokú polinomnak n darab gyöke van a komplex számok körében multiplicitással számolva.

Polinomosztás

Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomokhoz léteznek $q(x)$ és $r(x)$ polinomok úgy, hogy

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \qquad \deg r < \deg g.$$

Elnevezés: $g(x)$ az osztó, $r(x)$ a maradék.

Analógia: maradékos osztás: pl. 25-öt maradékosan osztjuk 3-mal:
$25 = 8 \cdot 3 + 1$: a maradék (1) mindig kisebb, mint az osztó (3).

Példa: $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 7x - 10$ és $g(x) = x^2 - x + 2$:

$$2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 7x - 10 = (2x^2 + 5x - 1)(x^2 - x + 2) + (-4x - 8)$$

Speciális eset: $g(x) = x - a$ elsőfokú polinom, akkor $r(x) = c$ konstans:

$$f(x) = q(x)(x - a) + c$$

Ha x helyébe a-t helyettesítünk, akkor $f(a) = q(a)(a - a) + c$, azaz $f(a) = c$. A $c = 0$ eset:

(kis) Bézout-tétel:
Ha egy polinomnak gyöke egy a szám, akkor az $(x - a)$ kiemelhető belőle.

Egy példa

Példa: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$x^3 \quad + \quad 3x^2 \quad - \quad 5x \quad + \quad 3 \quad = (x-2)($$

Egy példa

Példa: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x^3 & + & 3x^2 & - & 5x & + & 3 & = (x-2)(x^2 \\ x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Egy példa

Példa: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$
\begin{array}{ccccccccl}
x^3 & + & 3x^2 & - & 5x & + & 3 & = (x-2)(x^2 \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\
\hline
 & & 5x^2 & - & 5x & & &
\end{array}
$$

Egy példa

Példa: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x^3 & + & 3x^2 & - & 5x & + & 3 \quad = (x-2)(x^2+5x \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & \\
\hline
 & & 5x^2 & - & 5x & & \\
 & & 5x^2 & - & 10x & & \\
\cline{3-5}
\end{array}
$$

Egy példa

Példa: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$
\begin{array}{ccccccccl}
x^3 & + & 3x^2 & - & 5x & + & 3 & = (x-2)(x^2+5x \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\
\hline
 & & 5x^2 & - & 5x & & & \\
 & & 5x^2 & - & 10x & & & \\
\cline{3-5}
 & & & & 5x & + & 3 &
\end{array}
$$

Egy példa

Példa: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
x^3 & + & 3x^2 & - & 5x & + & 3 & = (x-2)(x^2+5x+5 \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\
\hline
 & & 5x^2 & - & 5x & & & \\
 & & 5x^2 & - & 10x & & & \\
\cline{3-5}
 & & & & 5x & + & 3 & \\
 & & & & 5x & - & 10 & \\
\cline{5-7}
\end{array}
$$

Egy példa

Példa: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x^3 & + & 3x^2 & - & 5x & + & 3 \quad = (x-2)(x^2+5x+5 \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & \\
\hline
 & & 5x^2 & - & 5x & & \\
 & & 5x^2 & - & 10x & & \\
\hline
 & & & & 5x & + & 3 \\
 & & & & 5x & - & 10 \\
\hline
 & & & & & & 13
\end{array}
$$

Egy példa

Példa: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$
\begin{array}{ccccccccl}
x^3 & + & 3x^2 & - & 5x & + & 3 & = (x-2)(x^2+5x+5)+13 \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\
\hline
 & & 5x^2 & - & 5x & & & \\
 & & 5x^2 & - & 10x & & & \\
\cline{3-5}
 & & & & 5x & + & 3 & \\
 & & & & 5x & - & 10 & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 13 &
\end{array}
$$

Tehát a maradék 13.

Még egy példa

Példa: $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10$ és $g(x) = x^2 - x + 2$ polinomok osztása

Még egy példa

Példa: $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10$ és $g(x) = x^2 - x + 2$ polinomok osztása

$$2x^4 \quad + \quad 3x^3 \quad - \quad 2x^2 \quad + \quad 7x \quad - \quad 10 \quad = (x^2 - x + 2)($$

Még egy példa

Példa: $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10$ és $g(x) = x^2 - x + 2$ polinomok osztása

$$
\begin{array}{ccccccccc}
2x^4 & + & 3x^3 & - & 2x^2 & + & 7x & - & 10 \quad = (x^2 - x + 2)(2x^2 \\
2x^4 & - & 2x^3 & + & 4x^2 & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

Még egy példa

Példa: $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10$ és $g(x) = x^2 - x + 2$ polinomok osztása

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
2x^4 & + & 3x^3 & - & 2x^2 & + & 7x & - & 10 & = (x^2 - x + 2)(2x^2 \\
2x^4 & - & 2x^3 & + & 4x^2 & & & & & \\
\hline
 & & 5x^3 & - & 6x^2 & + & 7x & & &
\end{array}
$$

Még egy példa

Példa: $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10$ és $g(x) = x^2 - x + 2$ polinomok osztása

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
2x^4 & + & 3x^3 & - & 2x^2 & + & 7x & - & 10 & = (x^2 - x + 2)(2x^2 + 5x \\
2x^4 & - & 2x^3 & + & 4x^2 & & & & & \\
\hline
 & & 5x^3 & - & 6x^2 & + & 7x & & & \\
 & & 5x^3 & - & 5x^2 & + & 10x & & & \\
\cline{3-7}
\end{array}
$$

Még egy példa

Példa: $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10$ és $g(x) = x^2 - x + 2$ polinomok osztása

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
2x^4 & + & 3x^3 & - & 2x^2 & + & 7x & - & 10 & = (x^2 - x + 2)(2x^2 + 5x \\
2x^4 & - & 2x^3 & + & 4x^2 & & & & & \\
\hline
 & & 5x^3 & - & 6x^2 & + & 7x & & & \\
 & & 5x^3 & - & 5x^2 & + & 10x & & & \\
\hline
 & & & & -x^2 & - & 3x & - & 10 &
\end{array}
$$

Még egy példa

Példa: $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10$ és $g(x) = x^2 - x + 2$
polinomok osztása

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
2x^4 & + & 3x^3 & - & 2x^2 & + & 7x & - & 10 & = (x^2 - x + 2)(2x^2 + 5x - 1 \\
2x^4 & - & 2x^3 & + & 4x^2 & & & & & \\
\hline
 & & 5x^3 & - & 6x^2 & + & 7x & & & \\
 & & 5x^3 & - & 5x^2 & + & 10x & & & \\
\hline
 & & & & -x^2 & - & 3x & - & 10 & \\
 & & & & -x^2 & + & x & - & 2 & \\
\hline
\end{array}
$$

Még egy példa

Példa: $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10$ és $g(x) = x^2 - x + 2$ polinomok osztása

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
2x^4 & + & 3x^3 & - & 2x^2 & + & 7x & - & 10 & = (x^2 - x + 2)(2x^2 + 5x - 1 \\
2x^4 & - & 2x^3 & + & 4x^2 & & & & & \\
\cline{1-5}
 & & 5x^3 & - & 6x^2 & + & 7x & & & \\
 & & 5x^3 & - & 5x^2 & + & 10x & & & \\
\cline{3-7}
 & & & & -x^2 & - & 3x & - & 10 & \\
 & & & & -x^2 & + & x & - & 2 & \\
\cline{5-9}
 & & & & & & -4x & - & 8 &
\end{array}
$$

Még egy példa

Példa: $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10$ és $g(x) = x^2 - x + 2$ polinomok osztása

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
2x^4 & + & 3x^3 & - & 2x^2 & + & 7x & - & 10 \\
2x^4 & - & 2x^3 & + & 4x^2 & & & & \\
\hline
 & & 5x^3 & - & 6x^2 & + & 7x & & \\
 & & 5x^3 & - & 5x^2 & + & 10x & & \\
\hline
 & & & & -x^2 & - & 3x & - & 10 \\
 & & & & -x^2 & + & x & - & 2 \\
\hline
 & & & & & & -4x & - & 8
\end{array}
\quad = (x^2 - x + 2)(2x^2 + 5x - 1) + \\ + (-4x - 8)
$$

Tehát a maradék $-4x - 8$.

Már feladat

Példa: $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1$ és $g(x) = x + 1$ polinomok osztása

Már feladat

Példa: $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1$ és $g(x) = x + 1$ polinomok osztása

$$x^4 \quad + \quad 2x^3 \quad - \quad 7x^2 \quad + \quad 8x \quad - \quad 1 = (x+1)($$

Már feladat

Példa: $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1$ és $g(x) = x + 1$ polinomok osztása

$$\begin{array}{ccccccccccl} x^4 & + & 2x^3 & - & 7x^2 & + & 8x & - & 1 & = & (x+1)(x^3 \\ x^4 & + & x^3 & & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Már feladat

Példa: $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1$ és $g(x) = x + 1$ polinomok osztása

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x^4 & + & 2x^3 & - & 7x^2 & + & 8x & - & 1 & = (x+1)(x^3 \\
x^4 & + & x^3 & & & & & & & \\
\hline
 & & x^3 & - & 7x^2 & & & & &
\end{array}
$$

Már feladat

Példa: $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1$ és $g(x) = x + 1$ polinomok osztása

$$
\begin{array}{ccccccccccl}
x^4 & + & 2x^3 & - & 7x^2 & + & 8x & - & 1 & = & (x+1)(x^3 + x^2 \\
x^4 & + & x^3 & & & & & & & & \\
\cline{1-3}
 & & x^3 & - & 7x^2 & & & & & & \\
 & & x^3 & + & x^2 & & & & & & \\
\cline{3-5}
\end{array}
$$

Már feladat

Példa: $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1$ és $g(x) = x + 1$ polinomok osztása

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x^4 & + & 2x^3 & - & 7x^2 & + & 8x & - & 1 & = (x+1)(x^3 + x^2 \\
x^4 & + & x^3 & & & & & & & \\
\hline
 & & x^3 & - & 7x^2 & & & & & \\
 & & x^3 & + & x^2 & & & & & \\
\hline
 & & & & -8x^2 & + & 8x & & &
\end{array}
$$

Már feladat

Példa: $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1$ és $g(x) = x + 1$ polinomok osztása

$$
\begin{array}{ccccccccccl}
x^4 & + & 2x^3 & - & 7x^2 & + & 8x & - & 1 & = & (x+1)(x^3 + x^2 - 8x \\
x^4 & + & x^3 & & & & & & & & \\
\cline{1-3}
 & & x^3 & - & 7x^2 & & & & & & \\
 & & x^3 & + & x^2 & & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & & -8x^2 & + & 8x & & & & \\
 & & & & -8x^2 & - & 8x & & & & \\
\cline{5-7}
\end{array}
$$

Már feladat

Példa: $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1$ és $g(x) = x + 1$ polinomok osztása

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
x^4 & + & 2x^3 & - & 7x^2 & + & 8x & - & 1 & = (x+1)(x^3 + x^2 - 8x \\
x^4 & + & x^3 & & & & & & & \\
\cline{1-3}
 & & x^3 & - & 7x^2 & & & & & \\
 & & x^3 & + & x^2 & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & & -8x^2 & + & 8x & & & \\
 & & & & -8x^2 & - & 8x & & & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 16x & - & 1 &
\end{array}
$$

Már feladat

Példa: $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1$ és $g(x) = x + 1$ polinomok osztása

$$
\begin{array}{ccccccccccl}
x^4 & + & 2x^3 & - & 7x^2 & + & 8x & - & 1 & = (x+1)(x^3 + x^2 - 8x + 16 \\
x^4 & + & x^3 & & & & & & & \\
\cline{1-3}
 & & x^3 & - & 7x^2 & & & & & \\
 & & x^3 & + & x^2 & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & & -8x^2 & + & 8x & & & \\
 & & & & -8x^2 & - & 8x & & & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 16x & - & 1 & \\
 & & & & & & 16x & + & 16 & \\
\cline{7-9}
\end{array}
$$

Már feladat

Példa: $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1$ és $g(x) = x + 1$ polinomok osztása

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x^4 & + & 2x^3 & - & 7x^2 & + & 8x & - & 1 = (x+1)(x^3 + x^2 - 8x + 16 \\
x^4 & + & x^3 & & & & & & \\
\cline{1-3}
& & x^3 & - & 7x^2 & & & & \\
& & x^3 & + & x^2 & & & & \\
\cline{3-5}
& & & & -8x^2 & + & 8x & & \\
& & & & -8x^2 & - & 8x & & \\
\cline{5-7}
& & & & & & 16x & - & 1 \\
& & & & & & 16x & + & 16 \\
\cline{7-9}
& & & & & & & - & 17
\end{array}
$$

Már feladat

Példa: $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1$ és $g(x) = x + 1$ polinomok osztása

$$
\begin{array}{ccccccccccl}
x^4 & + & 2x^3 & - & 7x^2 & + & 8x & - & 1 & = & (x+1)(x^3+x^2-8x+16)-17 \\
x^4 & + & x^3 & & & & & & & & \\
\hline
 & & x^3 & - & 7x^2 & & & & & & \\
 & & x^3 & + & x^2 & & & & & & \\
\hline
 & & & & -8x^2 & + & 8x & & & & \\
 & & & & -8x^2 & - & 8x & & & & \\
\hline
 & & & & & & 16x & - & 1 & & \\
 & & & & & & 16x & + & 16 & & \\
\hline
 & & & & & & & - & 17 & &
\end{array}
$$

Gyökök multiplicitása

A $p(x)$ polinom a gyökének multiplicitása m, ha $(x-a)^m$ kiemelhető p-ből, de $(x-a)^{m+1}$ már nem (m-szeres gyök).

Például: $p(x) = x^3 + 2x^2 + x$ polinomban a -1 hányszoros gyök?

$$x^3 + 2x^2 + x = (x+1)(x^2+x) = (x+1)(x+1)x = (x+1)^2 x,$$

azaz kétszeres gyök ($m = 2$).

Gyöktényezős alak:
Ha a $p(x)$ n-edfokú polinom főegyütthatója a_n és gyökei $x_1, x_2, \ldots, x_k$, melyek multiplicitása $m_1, m_2, \ldots, m_k$, és ezek összege n, akkor

$$p(x) = a_n(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2} \ldots (x-x_k)^{m_k}$$

Tétel a racionális gyökökről

Az $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós polinom $\frac{p}{q}$ racionális gyökeire (p, q egészek és relatív prímek) teljesül, hogy p osztja a_0-t és q osztja a_n-et.

Bizonyítás: Ha $x = \frac{p}{q}$ gyök, akkor

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

$$a_n p^n + \underbrace{a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n}_{\text{osztható } q\text{-val}} = 0.$$

Így $a_n p^n$ osztható q-val, így a_n is (p, q relatív prím).

Hasonlóan p osztja a_0-t.

Speciális eset: $a_n = 1$, ekkor az összes racionális gyök egész ($q = \pm 1$), és az a_0 konstanstag osztója.

Gyökkeresés

Keressük meg az $x^3 + 6x^2 + 10x + 3$ polinom gyökeit!

Először keresünk egy racionális gyököt, amit kiemelve egy másodfokú polinomot kapunk, melynek a megoldóképlettel meghatározzuk a gyökeit.

Lehetséges gyökök a 3 osztói: $-3, -1, 1, 3$.

Ezeket behelyettesítgetve $x_1 = -3$ gyök (többi nem).

Ekkor az $(x + 3)$-at kiemeljük:

$$x^3 + 6x^2 + 10x + 3 = (x + 3)(x^2 + 3x + 1)$$

Végül az $x^2 + 3x + 1 = 0$ másodfokú egyenletet megoldjuk:

$$x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Tehát a gyökök: -3, $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.