5. előadás

Függvényhatárértékek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2021. szeptember 22.

Bevezető mese

Adott egy függvény, nem formulával, hanem minden pontban lekérdezhetjük a függvény értékét.

A gonosz manó az $x_0 = 2$ pontban elrejtette a függvény értékét, nekünk kell kitalálni. Hogyan csináljuk?

Megnézzük, mi a függvény értéke $1{,}9$-ben: $16{,}3$ és $2{,}1$-ben: $15{,}8$.
Akkor talán 16??

Azért nézzük tovább:

$$
\begin{array}{llll}
f(1{,}99) & = 16{,}02954 & f(2{,}01) & = 15{,}97987 \\
f(1{,}999) & = 16{,}00393 & f(2{,}001) & = 15{,}99812 \\
f(1{,}9999) & = 16{,}00041 & f(2{,}0001) & = 15{,}99976 \\
f(1{,}99999) & = 16{,}00002 & f(2{,}00001) & = 15{,}99998
\end{array}
$$

Hát, így már elég meggyőző, hogy $f(2) = 16$.
De ebben soha sem lehetünk biztosak.
Mit tudunk biztosan?
Ha közel vagyunk az $x_0 = 2$-höz, akkor a függvényérték is közel van a 16-hoz.

Úton a definíció felé

Ha közel vagyunk az $x_0 = 2$-höz, akkor a függvényérték is közel van a 16-hoz.
Jó-jó, de mennyire van közel?
Mondjuk 3 tizedesjegyre stimmel, ha elég közel mentünk a 2-höz.
De mit jelent, hogy elég közel? Legfeljebb $0{,}002$ az eltérés.
És ha más pontosságot szeretnénk?
Arra is lesz valami eltérés maximum!

Tehát:
Ha adott egy pontosság, hogy mennyire szeretnénk közel kerülni a 16-hoz, azaz mondjuk legfeljebb ε eltérést szeretnénk.
Akkor ehhez van egy másik eltérés, legyen δ, hogy ha 2-höz δ-nál közelebb vagyunk, akkor teljesülni fog a kívánságunk.

Még pontosabban:
Ha adott $\varepsilon > 0$, akkor ahhoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - 2| < \delta$, akkor $|f(x) - 16| < \varepsilon$.

Határérték definíciója

Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az x_0 pontban a határértéke A, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ és $x \neq x_0$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Nem biztos, hogy a függvény mindenütt értelmes, de azt fel kell tennünk, hogy x_0 közelében értelmes, azaz:

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ és $x \neq x_0$, akkor $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Nem követeljük meg, hogy a függvény x_0-ban értelmezve legyen.

Kicsit egyszerűbben felírva:
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés:
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ vagy $f(x) \to A$, ha $x \to x_0$.

Egy példa

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Az $f(x) = \dfrac{x-2}{x-2}$ függvény értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
Mennyi a határértéke $x_0 = 2$-ben?

Ha $x \neq 2$, akkor $f(x) = 1$, így $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$.

Definiálhatnánk így is a függvényt:
$f\colon \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = 1 \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ esetén.

De a következő is egy függvény:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq 2 \\ 9, & \text{ha } x = 2 \end{cases}$$

Ekkor $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 1$, mert a 2-beli érték nem számít a határértéknél.

Még egy példa

Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Példa:

Az $f(x) = 3x + 1$ függvény $x_0 = 2$-ben.

A határérték „valószínűleg'' $f(2) = 7$.

Mi lesz a δ egy adott $\varepsilon > 0$-hoz?

Az kell, hogy

$$\begin{aligned} |f(x) - A| &< \varepsilon \\ |3x + 1 - 7| &< \varepsilon \\ |3x - 6| &< \varepsilon \\ 3 \cdot |x - 2| &< \varepsilon \\ |x - 2| &< \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

ami teljesül, ha $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Az egészrész függvény

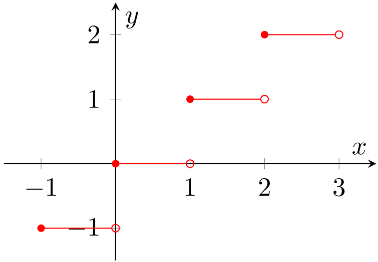
Az $f: D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Mi a helyzet az $f(x) = [x]$ egészrész függvénnyel $x_0 = 2$-ben?

Ha $|x - 2| < \delta < 1$ és $x \neq 2$, akkor
$f(x) = 2$, ha $x > 2$, és
$f(x) = 1$, ha $x < 2$.

Tehát $|f(x) - A| < \varepsilon < \frac{1}{2}$ nem teljesül sem $A = 1$-gyel, sem $A = 2$-vel.

Így a határérték nem létezik.



Jobb és bal oldali határérték

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Érdemes külön tekinteni a két oldalt:

Jobb oldali határérték ($x_0 < x$):
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a jobb oldali határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < x - x_0 < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = A$ vagy $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A$.

Bal oldali határérték ($x < x_0$):
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a bal oldali határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < x_0 - x < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = A$ vagy $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = A$.

Két tétel

Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Tétel:
Ha az f függvénynek x_0 pontban létezik a jobb és bal oldali határértéke, és ezek egyenlőek, akkor a függvénynek létezik az x_0 pontban határértéke, és ez megegyezik a jobb és bal oldali határértékkel.

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = A = \lim_{x \to x_0 +} f(x) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Tétel:
Ha létezik a határérték, akkor egyértelmű:
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ és $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$ esetén $A = B$.

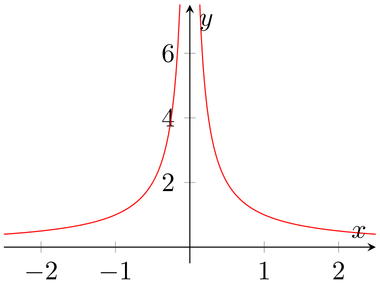
Indirekt bizonyítás: $\varepsilon = \frac{|A-B|}{3}$-hoz nincs jó δ.

Végtelen határérték

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Mi a helyzet az $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$ függvénnyel a 0 pontban?

Minél közelebb vagyunk a 0-hoz annál nagyobb a függvény, végtelenhez tart.



Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) > K$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

Végtelen határérték – variációk

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) > K$.

Lehet mínusz végtelen is a határérték, ekkor a függvényérték nagyon kicsi:
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) < K$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Ezekben az esetekben is lehet jobb vagy bal oldali határértéket venni, pl.:
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a jobb oldali határértéke $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < x - x_0 < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) > K$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = +\infty$.

Stb...

Példa: $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ és $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Határérték a végtelenben

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Nem csak a határérték lehet végtelen, hanem az x_0 pont is.
Ekkor a δ „helyett" K szám van:

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek a $+\infty$-ben a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $K < x$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

Példa: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Természetesen ez a $-\infty$-ben is hasonlóan működik:
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek a $-\infty$-ben a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $K > x$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Megjegyzés: A végtelenben nincs külön jobb és bal oldali határérték.

Végtelenben végtelen

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek a $+\infty$-ben a határértéke $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $L \in \mathbb{R}$, hogy $L < x$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) > K$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Hasonlóan:
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek a $+\infty$-ben a határértéke $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $L \in \mathbb{R}$, hogy $L < x$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) < K$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek a $-\infty$-ben a határértéke $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $L \in \mathbb{R}$, hogy $L > x$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) > K$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek a $-\infty$-ben a határértéke $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $L \in \mathbb{R}$, hogy $L > x$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) < K$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Összefoglalás

$$\text{Az } f\colon D_f \to \mathbb{R}\ (D_f \subseteq \mathbb{R}) \text{ függvénynek } \begin{array}{c} \text{az } x_0 \text{ pontban a} \\ \text{az } x_0 \text{ pontban a jobb oldali} \\ \text{az } x_0 \text{ pontban a bal oldali} \\ \text{a } +\infty\text{-ben a} \\ \text{a } -\infty\text{-ben a} \end{array}$$

$$\text{határértéke } \begin{array}{c} A \in \mathbb{R}, \\ +\infty, \\ -\infty, \end{array} \text{ ha minden } \begin{array}{c} \varepsilon > 0\text{-hoz} \\ K \in \mathbb{R}\text{-hez} \\ K \in \mathbb{R}\text{-hez} \end{array} \text{ van olyan } \begin{array}{c} \delta > 0, \\ \delta > 0, \\ \delta > 0, \\ L \in \mathbb{R}, \\ L \in \mathbb{R}, \end{array}$$

$$\text{hogy } \begin{array}{c} 0 < |x - x_0| < \delta \\ 0 < x - x_0 < \delta \\ 0 < x_0 - x < \delta \\ L < x \\ L > x \end{array} \text{ esetén } x \in D_f \text{ és } \begin{array}{c} |f(x) - A| < \varepsilon. \\ f(x) > K. \\ f(x) < K. \end{array}$$