6. előadás

Függvényhatárérték kiszámítása

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2021. szeptember 27.

Műveletek és a határérték

Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeknek létezik határértéke x_0-ban, akkor

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x\to x_0}(f-g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)},\ \text{feltéve, hogy } g \neq 0 \text{ az } x_0 \text{ egy környezetében.}$$

Hasonló állítások igazak jobb és bal oldali, és végtelenbe vett határértékekre is.

Sőt, még a határérték is lehet végtelen, ha „elvégezhető a művelet”.

Ha $g\colon A \to B$ és $f\colon B \to C$, és tegyük fel, hogy x_0-ban g-nek y_0 a határértéke, és y_0-ban f-nek van határértéke, akkor

$$\lim_{x\to x_0}(f\circ g)(x) = \lim_{y\to y_0} f(y),\ \text{ahol } y_0 = \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Rendőrelv

Tegyük fel, hogy az $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekre teljesül, hogy

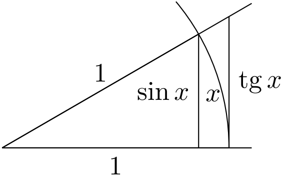
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ minden } x \in \mathbb{R}\text{-re},$$

és tegyük fel, hogy f és h függvényeknek a határértéke x_0-ban A (mindkettőnek). Ekkor a g függvény határértéke x_0-ban szintén A.

Példa: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Tudjuk, hogy $0 < x < \frac{\pi}{2}$ esetén

$$\begin{array}{ccccc} \sin x & \leq & x & \leq & \operatorname{tg} x \\ 1 & \leq & \dfrac{x}{\sin x} & \leq & \dfrac{1}{\cos x} \\ \downarrow & & & & \downarrow \quad \text{ha } x \to 0 \\ 1 & & & & 1 \end{array}$$



Ekkor a rendőrelv szerint $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1.$

Így $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\frac{x}{\sin x}} = \dfrac{1}{1} = 1.$

Nevezetes határértékek

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \text{ nem létezik, de}$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to 0+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

Feladatok

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{2x+1} =$$

Feladatok

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+3}{2x+1} = \frac{2+3}{2 \cdot 2 + 1} = 1$$

Feladatok

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{2x+1} = \frac{2+3}{2\cdot 2+1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x^2-2x} =$$

Feladatok

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{2x+1}=\frac{2+3}{2\cdot 2+1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x^2-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x-2}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$$

Feladatok

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+3}{2x+1} = \frac{2+3}{2 \cdot 2 + 1} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2+x}{x^2-2x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x+1)}{x(x-2)} = \lim_{x \to 0} \frac{x+1}{x-2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-4x+3}{x-1} =$$

Feladatok

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{2x+1}=\frac{2+3}{2\cdot 2+1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x^2-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x-2}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-3)=-2$$

Feladatok

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{2x+1} = \frac{2+3}{2\cdot 2+1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x^2-2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+1)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x-2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x+3}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-3) = -2$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} =$$

Feladatok

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{2x+1} = \frac{2+3}{2\cdot 2+1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x^2-2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+1)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x-2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x+3}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-3) = -2$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x-1} = \frac{-1}{1} = -1$$

Feladatok – gyöktelenítés

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$$

Feladatok – gyöktelenítés

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

Feladatok – gyöktelenítés

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\,\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)-4}{(x-2)\big(\sqrt{x+2}+2\big)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\big(\sqrt{x+2}+2\big)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{3-2x}-1}$$

Feladatok – gyöktelenítés

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{3-2x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}}{\left(\sqrt{3-2x}-1\right)\frac{\sqrt{3-2x}+1}{\sqrt{3-2x}+1}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x+3-2^2}{\sqrt{x+3}+2}}{\frac{3-2x-1^2}{\sqrt{3-2x}+1}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}}{\frac{-2(x-1)}{\sqrt{3-2x}+1}}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3-2x}+1}{(-2)(\sqrt{x+3}+2)}=\frac{\sqrt{3-2}+1}{(-2)(\sqrt{1+3}+2)}=\frac{2}{-8}=-\frac{1}{4}$$

Feladatok – folytatás

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(5x)}{7x}$$

Feladatok – folytatás

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{7x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}\frac{5x}{7x} = \frac{5}{7},$$

mert $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y}$, ha $y = 5x$.

Feladatok – folytatás

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{7x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{5x}\frac{5x}{7x} = \frac{5}{7},$$

mert $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{5x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y}$, ha $y = 5x$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-3}{x-1}$$

Feladatok – folytatás

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}\frac{5x}{7x}=\frac{5}{7},$$

mert $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y}$, ha $y=5x$.

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x-1}-\frac{2}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(1-\frac{2}{x-1}\right)$ nem létezik, de

Feladatok – folytatás

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}\frac{5x}{7x}=\frac{5}{7},$$

mert $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{5x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin(y)}{y}$, ha $y=5x$.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x-1}-\dfrac{2}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(1-\dfrac{2}{x-1}\right)$ nem létezik, de

$$\lim_{x\to 1+}\frac{x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\left(1-\frac{2}{x-1}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\left(1-\frac{2}{x-1}\right)=+\infty$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + 4x^3 - 12x^2 + 3}{x^3 - 7x^2 + 6x - 7}$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+4x^3-12x^2+3}{x^3-7x^2+6x-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4-\frac{12}{x}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = +\infty$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+4x^3-12x^2+3}{x^3-7x^2+6x-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4-\frac{12}{x}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+7x-2}{x^4-8x^3-7x+2}$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+4x^3-12x^2+3}{x^3-7x^2+6x-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4-\frac{12}{x}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+7x-2}{x^4-8x^3-7x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}-\frac{2}{x^4}}{1-\frac{8}{x}-\frac{7}{x^3}+\frac{2}{x^4}} = 0$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+4x^3-12x^2+3}{x^3-7x^2+6x-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4-\frac{12}{x}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+7x-2}{x^4-8x^3-7x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}-\frac{2}{x^4}}{1-\frac{8}{x}-\frac{7}{x^3}+\frac{2}{x^4}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-3x^3-2x^2+3x+2}{x^3+5x^2+6x-7}$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+4x^3-12x^2+3}{x^3-7x^2+6x-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4-\frac{12}{x}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+7x-2}{x^4-8x^3-7x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}-\frac{2}{x^4}}{1-\frac{8}{x}-\frac{7}{x^3}+\frac{2}{x^4}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-3x^3-2x^2+3x+2}{x^3+5x^2+6x-7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = -\infty$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+4x^3-12x^2+3}{x^3-7x^2+6x-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4-\frac{12}{x}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+7x-2}{x^4-8x^3-7x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}-\frac{2}{x^4}}{1-\frac{8}{x}-\frac{7}{x^3}+\frac{2}{x^4}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-3x^3-2x^2+3x+2}{x^3+5x^2+6x-7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+3x}{6-4x^2}$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+4x^3-12x^2+3}{x^3-7x^2+6x-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4-\frac{12}{x}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+7x-2}{x^4-8x^3-7x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}-\frac{2}{x^4}}{1-\frac{8}{x}-\frac{7}{x^3}+\frac{2}{x^4}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-3x^3-2x^2+3x+2}{x^3+5x^2+6x-7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+3x}{6-4x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\frac{3}{x}}{\frac{6}{x^2}-4} = -\infty$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+4x^3-12x^2+3}{x^3-7x^2+6x-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4-\frac{12}{x}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+7x-2}{x^4-8x^3-7x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}-\frac{2}{x^4}}{1-\frac{8}{x}-\frac{7}{x^3}+\frac{2}{x^4}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-3x^3-2x^2+3x+2}{x^3+5x^2+6x-7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+3x}{6-4x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\frac{3}{x}}{\frac{6}{x^2}-4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5+4x^3-12x^2+3}{x^3-7x^2+6x-7}$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+4x^3-12x^2+3}{x^3-7x^2+6x-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4-\frac{12}{x}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+7x-2}{x^4-8x^3-7x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}-\frac{2}{x^4}}{1-\frac{8}{x}-\frac{7}{x^3}+\frac{2}{x^4}}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-3x^3-2x^2+3x+2}{x^3+5x^2+6x-7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+3x}{6-4x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\frac{3}{x}}{\frac{6}{x^2}-4}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5+4x^3-12x^2+3}{x^3-7x^2+6x-7}=\frac{3}{-7}=-\frac{3}{7}$$