Készülés az 1. zh-ra

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2021. október 11.

Feladatok

1. Adjuk meg a valós számoknak a lehető legbővebb részhalmazát, ahol az $f(x) = \frac{\arcsin(x-3)}{\ln(3x-9)}$ függvény értelmezhető!
2. A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = -3$ szám gyöke a
$$x^4 + 3x^3 - 3x^2 + cx - 6$$
polinomnak? Határozzuk meg ebben az esetben a polinom összes valós gyökét és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.
3. Invertálható-e az $f(x) = 3 + 2^{4x-1}$ függvény? Ha igen, akkor adjuk meg az inverzét!
4. Határozzuk meg az alábbi határértékeket!
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 3x - 1}{x^2 - 1} \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$$
5. Határozzuk meg az
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+x-1}{x^2-1}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}, \\ \frac{3}{2}, & \text{ha } x = -1, \\ 0, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$
függvény szakadási helyeit és azok fajtáit.

1. feladat megoldása

Adjuk meg a valós számoknak a lehető legbővebb részhalmazát, ahol az $f(x) = \dfrac{\arcsin(x-3)}{\ln(3x-9)}$ függvény értelmezhető!

Az $\arcsin$ függvény csak a $[-1, 1]$ intervallumban van értelmezve, így

$$-1 \leq x - 3 \leq 1$$
$$2 \leq x \leq 4$$

Az $\ln$ függvény csak a pozitív számokon van értelmezve, így $3x - 9 > 0$, azaz $x > 3$.

A nevező nem lehet 0, így mivel $\ln(1) = 0$, a $3x - 9 \neq 1$, azaz $x \neq \frac{10}{3}$.

Tehát az értelmezés tartomány $(3; 4] \setminus \{\frac{10}{3}\}$.

2. feladat megoldása

A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = -3$ szám gyöke a

$$x^4 + 3x^3 - 3x^2 + cx - 6$$

polinomnak? Határozzuk meg ebben az esetben a polinom összes valós gyökét és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

Azt szeretnénk, hogy az $x_1 = -3$-at behelyettesítve 0-t kapjunk:

$$0 = (-3)^4 + 3\cdot(-3)^3 - 3\cdot(-3)^2 + c(-3) - 6 = 81 - 81 - 27 - 3c - 6 = -33 - 3c,$$

azaz $c = -11$. Az így kapott polinomnak az $x_1 = -3$ gyöke, ezt kiemelhetjük:

$$x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6 = (x+3)(x^3 - 3x - 2).$$

Ekkor az $x^3 - 3x - 2$ polinom gyökeit kell meghatároznunk. Ennek lehetséges racionális gyökei a 2 osztói, azaz $\pm 1, \pm 2$. Behelyettesítéssel kapjuk, hogy a $+1$ nem gyök, de a -1 gyök. Így ezt is kiemelhetjük:

$$x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x^2 - x - 2).$$

A kapott másodfokú polinomnak a gyökei (a megoldóképlettel): $-1, 2$.
Tehát a polinom valós gyökei: $-3, -1, 2$, ahol a -1 kétszeres gyök.
A gyöktényezős felbontás:

$$x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6 = (x+3)(x+1)^2(x-2).$$

3. feladat megoldása

Invertálható-e az $f(x) = 3 + 2^{4x-1}$ függvény? Ha igen, akkor adjuk meg az inverzét!

Az invertálhatósághoz az kell, hogy $f(x_1) = f(x_2)$ egyenlőségből következzen, hogy $x_1 = x_2$. Esetünkben:

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= f(x_2) \\
3 + 2^{4x_1-1} &= 3 + 2^{4x_2-1} \\
2^{4x_1-1} &= 2^{4x_2-1} && \text{mivel az exponenciális függvény injektív} \\
4x_1 - 1 &= 4x_2 - 1 \\
4x_1 &= 4x_2 \\
x_1 &= x_2
\end{aligned}$$

Így a függvény injektív.

3. feladat megoldásának folytatása

Invertálható-e az $f(x) = 3 + 2^{4x-1}$ függvény? Ha igen, akkor adjuk meg az inverzét!

Az f függvény értékkészlete a $(3, +\infty)$ intervallum (2 hatványai pozitívok), így az inverzet is ezen az intervallumon értelmezzük. Az inverzet az $f(x) = y$ egyenlet átrendezésével kapjuk, azaz x-et kifejezzük ($y \in (3, +\infty)$):

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ 3 + 2^{4x-1} &= y \\ 2^{4x-1} &= y - 3 \qquad \text{mivel a } 2^x \text{ függvény inverze a kettes alapú logritmus:} \\ 4x - 1 &= \log_2(y-3) \\ 4x &= \log_2(y-3) + 1 \\ x &= \frac{\log_2(y-3)+1}{4} \end{aligned}$$

Tehát $f^{-1}(y) = \frac{\log_2(y-3)+1}{4}$, ami az x változóval felírva:

$$f^{-1}(x) = \frac{\log_2(x-3)+1}{4} \qquad x \in (3, +\infty).$$

4. feladat megoldása

Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x-1}{x^2-1} \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$$

Az első határérték:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=-\infty$$

A második hatérértéket nem a szokásos 0-ban, hanem végtelenben vesszük. A rendőrelvet és azt használjuk, hogy $-1\le\sin x\le 1$:

$$\begin{array}{ccccc} -1 & \le & \sin x & \le & 1 \\ \dfrac{-1}{x} & \le & \dfrac{\sin x}{x} & \le & \dfrac{1}{x} \\ \downarrow & & & & \downarrow \quad \text{ha } x\to\infty \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

Tehát a rendőrelv szerint $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

5. feladat megoldása

Határozzuk meg az $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+x-1}{x^2-1}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}, \\ \dfrac{3}{2}, & \text{ha } x = -1, \\ 0, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$ függvény szakadási helyeit és azok fajtáit.

A függvény a ± 1-en kívül folytonos, elegendő ezt a két helyet vizsgálni.
Az 1 pontban a határérték nem létezik, de van jobb és bal oldali határérték:

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{2x^2+x-1}{x^2-1} = +\infty, \text{ mert } x^2-1>0$$

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{2x^2+x-1}{x^2-1} = -\infty, \text{ mert } x^2-1<0$$

Az 1 így szinguláris szakadási hely.

A -1-ben a tört számlálója is 0, így tudjuk egyszerűsíteni törtet $(x+1)$-gyel:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{2x^2+x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(2x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{2x-1}{x-1} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2},$$

ami éppen a függvény értéke az 1-ben, tehát itt folytonos a függvény, ez nem szakadási pont.