11. gyakorlat

Határozatlan integrálok folytatás

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2021. november 25.

1. feladat (a)

Határozzuk meg a $\displaystyle\int \frac{x^2+x-2}{x-3}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

1. feladat (a)

Határozzuk meg a $\displaystyle\int \frac{x^2+x-2}{x-3}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

Mivel a számlálóban magasabb fokú polinom áll, mint a nevezőben, így polinomosztást végzünk:

$$x^2+x-2=(x-3)(x+4)+10$$

Így:

$$\int \frac{x^2+x-2}{x-3}\,\mathrm{d}x=\int \frac{(x-3)(x+4)+10}{x-3}\,\mathrm{d}x=\int x+4+\frac{10}{x-3}\,\mathrm{d}x=$$
$$=\frac{x^2}{2}+4x+10\ln|x-3|+C$$

1. feladat (b)

Határozzuk meg a $\displaystyle\int \frac{x+2}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

1. feladat (b)

Határozzuk meg a $\int \frac{x+2}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

Először szétszedjük két integrállá:

$$\int \frac{x+2}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x$$

Az elsőt az első helyettesítési szabállyal számoljuk ki:

$$\int \frac{x}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{2x^2+5}4x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln(2x^2+5)+C$$

A másodikhoz lineáris helyettesítést végzünk:

$$\int \frac{2}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\int \frac{1}{\frac{2x^2}{5}+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{5}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5}}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)+C = \sqrt{\frac{2}{5}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)+C$$

Tehát:

$$\int \frac{x+2}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln(2x^2+5)+\sqrt{\frac{2}{5}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)+C$$

1. feladat (c)

Határozzuk meg a $\int \frac{2}{x^2 - 9} \, \mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

1. feladat (c)

Határozzuk meg a $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-9}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

Mivel $x^2-9=(x-3)(x+3)$, így

$$\frac{1}{x-3} \pm \frac{1}{x+3} = \frac{x+3\pm(x-3)}{(x-3)(x+3)},$$

ami $-$ előjel esetén éppen háromszorosa a kérdéses integrálnak, így:

$$\int \frac{2}{x^2-9}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(\ln|x-3| - \ln|x+3|) + C = \\ = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$$

Lehetett volna az arth vagy az arcth függvényeket is használni lineáris helyettesítéssel, de akkor különbséget kell tenni az $|x|<3$ és $|x|>3$ eset között. Például $|x|<3$ esetén:

$$\int \frac{2}{x^2-9}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{9}\int \frac{1}{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{9}\cdot 3\operatorname{arth}\left(\frac{x}{3}\right) + C = -\frac{2}{3}\operatorname{arth}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

A két eredmény egyenlő (az arth függvény a logaritmus segítségével kifejezhető).

2. feladat (a)

A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\int xe^{3x}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

2. feladat (a)

A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\int xe^{3x}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

A parciális integrálás képlete szerint:

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Itt $f(x) = x$, $g'(x) = e^{3x}$, amiből $f'(x) = 1$, $g(x) = \dfrac{e^{3x}}{3}$.

$$\int xe^{3x}\,\mathrm{d}x = x\frac{e^{3x}}{3} - \int 1 \cdot \frac{e^{3x}}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C$$

2. feladat (b)

A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\int x^2 \cos(5x)\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

2. feladat (b)

A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\int x^2 \cos(5x)\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

$$\begin{array}{ll} f(x) = x^2 & f'(x) = 2x \\ g'(x) = \cos(5x) & g(x) = \frac{\sin(5x)}{5} \end{array}$$

$$\int x^2 \cos(5x)\,\mathrm{d}x = x^2 \frac{\sin(5x)}{5} - \int 2x \frac{\sin(5x)}{5}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2 \sin(5x)}{5} - \frac{2}{5} \int x \sin(5x)\,\mathrm{d}x$$

Az utolsó integrál kiszámolásához újabb parciális integrálás:

$$\int x \sin(5x)\mathrm{d}x = x\left(-\frac{\cos(5x)}{5}\right) - \int 1 \cdot \left(-\frac{\cos(5x)}{5}\right)\mathrm{d}x = -\frac{x\cos(5x)}{5} + \frac{\sin(5x)}{25} + C$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g'(x) = \sin(5x) & g(x) = -\frac{\cos(5x)}{5} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos(5x)\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2 \sin(5x)}{5} - \frac{2}{5}\left(-\frac{x\cos(5x)}{5} + \frac{\sin(5x)}{25}\right) + C = \\ &= \frac{x^2 \sin(5x)}{5} + \frac{2x\cos(5x)}{25} - \frac{2\sin(5x)}{125} + C \end{aligned}$$

2. feladat (c)

A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\displaystyle\int \arcsin(3x)\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

2. feladat (c)

A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\displaystyle\int \arcsin(3x)\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

Bár ez nem szorzat, mégis a parciális integrálást alkalmazzuk:

$$f(x) = \arcsin(3x) \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}3 = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

$$g'(x) = 1 \qquad\qquad g(x) = x$$

$$\int \arcsin(3x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\arcsin(3x)\,\mathrm{d}x = x\arcsin(3x) - \int x\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Az utolsó integrálnál az első helyettesítési szabályt alkalmazzuk:

$$\int x\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{18}\int \left(1-9x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-18x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\frac{\left(1-9x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{1-9x^2}}{3} + C$$

Tehát:

$$\int\arcsin(3x)\,\mathrm{d}x = x\arcsin(3x) - \int x\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\,\mathrm{d}x = x\arcsin(3x) + \frac{\sqrt{1-9x^2}}{3} + C$$

2. feladat (d)

A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

2. feladat (d)

A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

Most az x^2 lesz a $g'(x)$ függvény:

$$f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = x^2 \quad g(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{1}{x} \frac{x^3}{3} \, \mathrm{d}x = \frac{x^3 \ln x}{3} - \int \frac{x^2}{3} \, \mathrm{d}x = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

3. feladat (a)

Alkalmas helyettesítéssel számítsuk ki a $\int e^{\sqrt[3]{x}} \, \mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

3. feladat (a)

Alkalmas helyettesítéssel számítsuk ki a $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

$u = \sqrt[3]{x}$ helyettesítéssel
$x = u^3$, így $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 3u^2$, azaz $\mathrm{d}x = 3u^2\,\mathrm{d}u$

$$\int e^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \int e^u 3u^2\,\mathrm{d}u = 3\int u^2 e^u\,\mathrm{d}u$$

Az integrált parciális integrálással számolhatjuk ki: $\begin{array}{ll} f(u) = u^2 & f'(u) = 2u \\ g'(u) = e^u & g(u) = e^u \end{array}$

$$\int u^2 e^u\,\mathrm{d}u = u^2 e^u - \int 2ue^u\,\mathrm{d}u$$

Egy újabb parciális integrálás:

$$\int ue^u\,\mathrm{d}u = ue^u - \int e^u\,\mathrm{d}u = ue^u - e^u + C$$

Tehát:

$$\int e^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = 3\int u^2 e^u\,\mathrm{d}u = 3\left(u^2 e^u - \int 2ue^u\,\mathrm{d}u\right) = 3u^2 e^u - 6(ue^u - e^u) + C =$$

$$= 3u^2 e^u - 6ue^u + 6e^u + C = 3\sqrt[3]{x^2}e^{\sqrt[3]{x}} - 6\sqrt[3]{x}e^{\sqrt[3]{x}} + 6e^{\sqrt[3]{x}} + C$$

3. feladat (b)

Alkalmas helyettesítéssel számítsuk ki a $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, \mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

3. feladat (b)

Alkalmas helyettesítéssel számítsuk ki a $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

$u = e^x$ helyettesítéssel
$x = \ln u$, így $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{u}$, azaz $\mathrm{d}x = \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u + \frac{1}{u}} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{u^2 + 1}\,\mathrm{d}u = \mathrm{arctg} u + C = \mathrm{arctg}(e^x) + C$$

3. feladat (c)

Alkalmas helyettesítéssel számítsuk ki a $\int x\sqrt{5+x}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

3. feladat (c)

Alkalmas helyettesítéssel számítsuk ki a $\displaystyle\int x\sqrt{5+x}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

$u = \sqrt{5+x}$ helyettesítéssel
$x = u^2 - 5$, így $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 2u$, azaz $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$

$$\int x\sqrt{5+x}\,\mathrm{d}x = \int (u^2-5)u \cdot 2u\,\mathrm{d}u = \int 2u^4 - 10u^2\,\mathrm{d}u = \frac{2}{5}u^5 - \frac{10}{3}u^3 + C =$$
$$= \frac{2}{5}\sqrt{5+x}^5 - \frac{10}{3}\sqrt{5+x}^3 + C = \frac{2}{5}(x+5)^{\frac{5}{2}} - \frac{10}{3}(x+5)^{\frac{3}{2}} + C$$

Helyettesítés nélkül, parciális integrálással is ki lehet hozni:

$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$
$g'(x) = \sqrt{5+x} \qquad g(x) = \frac{2}{3}(5+x)^{\frac{3}{2}}$

$$\int x\sqrt{5+x}\,\mathrm{d}x = x \cdot \frac{2}{3}(5+x)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(5+x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{2}{3}x(5+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}(5+x)^{\frac{5}{2}} + C =$$
$$= \frac{2}{3}x(5+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(5+x)^{\frac{5}{2}} + C$$

Némi átalakítás után látható, hogy a két eredmény azonos.

Opcionális feladat

Számítsuk ki az $\int e^{-x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.