12. gyakorlat

Határozott integrálok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2021. december 2.

1. feladat (a)

Számítsuk ki a $\int_0^1 \sqrt{5x+4}\,\mathrm{d}x$ határozott integrált.

1. feladat (a)

Számítsuk ki a $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{5x+4}\,\mathrm{d}x$ határozott integrált.

Newton–Leibniz-formula:
Ha az f függvény primitív függvénye az F, akkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

ahol a jobb oldalra az $[F(x)]_a^b$ jelölést is használjuk.

$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

és a lineáris helyettesítést használva kapjuk, hogy

$$\int_0^1 \sqrt{5x+4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}(5x+4)^{3/2}\right]_0^1 = \left[\frac{2(5x+4)^{3/2}}{15}\right]_0^1 =$$
$$= \frac{2\cdot 9^{3/2}}{15} - \frac{2\cdot 4^{3/2}}{15} = \frac{2\cdot 27 - 2\cdot 8}{15} = \frac{38}{15}.$$

1. feladat (b)

Számítsuk ki a $\int_1^3 x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ határozott integrált.

1. feladat (b)

Számítsuk ki a $\int_1^3 x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ határozott integrált.

Mivel $\left(1+x^3\right)' = 3x^2$, így

$$\int_1^3 x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_1^3 3x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\frac{3}{4}\left(1+x^3\right)^{4/3}\right]_1^3 =$$

$$= \left[\frac{\left(1+x^3\right)^{4/3}}{4}\right]_1^3 = \frac{28^{4/3}-2^{4/3}}{4} \approx 20{,}63.$$

1. feladat (c)

Számítsuk ki a $\int_1^4 \ln(5x-2)\,\mathrm{d}x$ határozott integrált.

1. feladat (c)

Számítsuk ki a $\displaystyle\int_1^4 \ln(5x-2)\,\mathrm{d}x$ határozott integrált.

Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int \frac{1}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = \ln x & f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = 1 & g(x) = x \end{array}$$

melyet a lineáris helyettesítéssel használva kapjuk, hogy

$$\int_1^4 \ln(5x-2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}\big((5x-2)\ln(5x-2) - (5x-2)\big)\right]_1^4 =$$
$$= \frac{1}{5}\,(18\ln(18) - 18) - \frac{1}{5}\,(3\ln(3) - 3) \approx 6{,}75.$$

1. feladat (d)

Számítsuk ki a $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} \, \mathrm{d}x$ határozott integrált.

1. feladat (d)

Számítsuk ki a $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$ határozott integrált.

Mivel $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, így

$$\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = [-\cos(\ln x)]_1^e = -\cos(1) - (-1) = 1 - \cos(1) \approx 0{,}46.$$

1. feladat (e)

Számítsuk ki a $\int_3^4 \frac{x}{x^2 - 3x + 2}\,\mathrm{d}x$ határozott integrált.

1. feladat (e)

Számítsuk ki a $\int_3^4 \frac{x}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$ határozott integrált.

Parciális törtekre bontással felhasználva, hogy a nevező gyökei 1 és 2:

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2-3x+2} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}\\ x &= A(x-2)+B(x-1)\\ x &= (A+B)x+(-2A-B)\end{aligned}$$

Ahonnan

$$\begin{aligned}1 &= A+B\\ 0 &= -2A-B\end{aligned}$$

Ezeket összeadva $1=-A$, azaz $A=-1$, és így $B=2$. Így az integrál:

$$\begin{aligned}\int_3^4 \frac{x}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = \int_3^4 \frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x-2}\,\mathrm{d}x &= [-\ln|x-1|+2\ln|x-2|]_3^4 =\\ &= (-\ln 3+2\ln 2)-(-\ln 2+2\ln 1) = 3\ln 2-\ln 3 =\\ &= \ln\left(\frac{8}{3}\right) \approx 0{,}981\end{aligned}$$

2. feladat

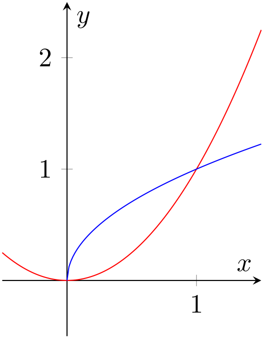
Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ és a $g(x) = \sqrt{x}$ függvények grafikonjai által közrezárt síkidom területét.

2. feladat

Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ és a $g(x) = \sqrt{x}$ függvények grafikonjai által közrezárt síkidom területét.

A két grafikon metszéspontjainak x koordinátái az $x^2 = \sqrt{x}$ egyenlet megoldásai, azaz 0 és 1.
A közrezárt síkidom területe a két görbe alatti terület különbsége:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$



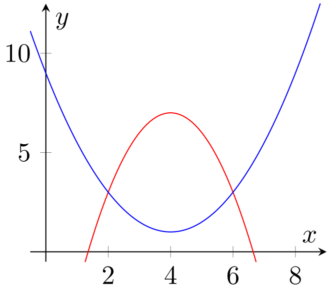
3. feladat

Határozzuk meg az $y = -x^2 + 8x - 9$ és az $y = \frac{x^2}{2} - 4x + 9$ egyenletű görbék által közrezárt síkidom területét.

3. feladat

Határozzuk meg az $y = -x^2 + 8x - 9$ és az $y = \dfrac{x^2}{2} - 4x + 9$ egyenletű görbék által közrezárt síkidom területét.

Hasonlóan az előző feladathoz itt is először meghatározzuk a metszéspontok x koordinátáját:



$$\begin{aligned} -x^2 + 8x - 9 &= \frac{x^2}{2} - 4x + 9 \\ 0 &= \frac{3}{2}x^2 - 12x + 18 \\ 0 &= x^2 - 8x + 12 \end{aligned}$$

másodfokú egyenlet megoldásai $x_1 = 2$ és $x_2 = 6$.
E két érték között kell a két függvény különbségét integrálni:

$$\int_2^6 (-x^2 + 8x - 9) - \left(\frac{x^2}{2} - 4x + 9\right) \mathrm{d}x = \int_2^6 -\frac{3}{2}x^2 + 12x - 18 \,\mathrm{d}x =$$

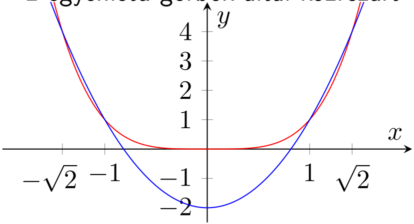
$$= \left[-\frac{3}{2}\frac{x^3}{3} + 6x^2 - 18x\right]_2^6 = 0 - (-16) = 16$$

4. feladat

Határozzuk meg az $y = x^4$ és az $y = 3x^2 - 2$ egyenletű görbék által közrezárt síkidom területét.

4. feladat

Határozzuk meg az $y = x^4$ és az $y = 3x^2 - 2$ egyenletű görbék által közrezárt síkidom területét.



A metszéspont meghatározása:

$$x^4 = 3x^2 - 2$$

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0$$

Ez $t = x^2$-re egy másodfokú egyenlet:

$$t^2 - 3t + 2 = 0,$$

ennek gyökei 1 és 2. Így a metszéspontok x koordinátái: $-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}$.
Három integrált kell kiszámolnunk:
$-\sqrt{2}$ és -1 között; -1 és 1 között; 1 és $\sqrt{2}$ között.

$$\int_1^{\sqrt{2}} 3x^2 - 2 - x^4 \,\mathrm{d}x = \left[x^3 - 2x - \frac{x^5}{5}\right]_1^{\sqrt{2}} = -\frac{4\sqrt{2}}{5} - \left(-\frac{6}{5}\right) = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{5}$$

$$\int_{-1}^{1} x^4 - (3x^2 - 2) \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{5} - x^3 + 2x\right]_{-1}^{1} = \frac{6}{5} - \left(-\frac{6}{5}\right) = \frac{12}{5}$$

A szimmetria miatt az első és harmadik megegyezik, így a terület $\dfrac{24 - 8\sqrt{2}}{5}$.