# 13. gyakorlat

## Határozott integrál alkalmazásai

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2021. december 9.

# 1. feladat

Számítsuk ki az $f(x) = x\sqrt{x},\ 0 \leq x \leq 4$ függvény grafikonjának az ívhosszát.

# 1. feladat

Számítsuk ki az $f(x) = x\sqrt{x},\ 0 \leq x \leq 4$ függvény grafikonjának az ívhosszát.
Az $f$ függvény grafikonjának ívhossza $a$ és $b$ között:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

A feladat esetében $f(x) = x\sqrt{x} = x^{3/2}$, így $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{1/2} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.
Így az ívhossz (alkalmazva a lineáris helyettesítés szabályát):

$$\int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_0^4 =$$
$$= \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) \approx 9{,}07$$

# 2. feladat

Határozzuk meg az $f(x) = \sin x, x \in [0, \pi]$ függvény grafikonjának az $x$ tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.

# 2. feladat

Határozzuk meg az $f(x) = \sin x, x \in [0, \pi]$ függvény grafikonjának az $x$ tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.

Az $f(x)$ függvény ($x \in [a, b]$) grafikonját $x$ tengely körüli megforgatásával kapott forgásfelület térfogata:

$$\pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

mely a jelen esetben felhasználva a $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$ összefüggést:

$$\pi \int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} \approx 4{,}93$$

# 3. feladat

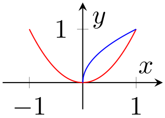
Határozzuk meg a forgási paraboloid alakú vázánk űrtartalmát és felszínét. Tegyük fel, hogy a vázát az $f(x) = x^2$ függvény ($x \in [-1, 1]$) grafikonjának $y$ tengely körüli forgatásával kaptuk.

# 3. feladat

Határozzuk meg a forgási paraboloid alakú vázánk űrtartalmát és felszínét. Tegyük fel, hogy a vázát az $f(x) = x^2$ függvény ($x \in [-1, 1]$) grafikonjának $y$ tengely körüli forgatásával kaptuk.

Áttérve $x$ tengely körüli forgatásra:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (x \in [0, 1])$$




Az űrtartalom a térfogat:

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$$

És a felszín felhasználva, hogy $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} \, \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} \, \mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}} \, \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}} \, \mathrm{d}x = 2\pi \left[\frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 =$$

$$= 2\pi \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5^{\frac{3}{2}}}{8} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}\right) = \frac{\left(5\sqrt{5} - 1\right)\pi}{6} \approx 5{,}33$$

# 4. feladat

Számítsuk ki az $f(x) = \ln\left(1 - x^2\right), x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ függvény grafikonjának az ívhosszát.

# 4. feladat

Számítsuk ki az $f(x) = \ln\left(1 - x^2\right), x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ függvény grafikonjának az ívhosszát.

Az $f$ függvény grafikonjának ívhossza: $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$.

A feladat esetében $f'(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}(-2x) = -\dfrac{2x}{1 - x^2}$.

Először csak az integrandus négyzetét számoljuk ki:

$$1 + \left(f'(x)\right)^2 = 1 + \left(-\frac{2x}{1 - x^2}\right)^2 = \frac{\left(1 - x^2\right)^2}{\left(1 - x^2\right)^2} + \frac{4x^2}{\left(1 - x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{1 - 2x^2 + x^4 + 4x^2}{\left(1 - x^2\right)^2} = \frac{1 + 2x^2 + x^4}{\left(1 - x^2\right)^2} = \frac{\left(1 + x^2\right)^2}{\left(1 - x^2\right)^2}$$

Így az ívhossz:

$$L = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 + x^2}{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-(1 - x^2) + 2}{1 - x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} -1 + \frac{2}{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-x + \ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right|\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} + \ln 3 - 0 \approx 0{,}599$$

# 5. feladat

Határozzuk meg az $f(x) = x - \dfrac{1}{x}, x \in [1, 3]$ függvény grafikonjának az $x$ tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.

# 5. feladat

Határozzuk meg az $f(x) = x - \dfrac{1}{x}, x \in [1,3]$ függvény grafikonjának az $x$ tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.

Az $f(x)$ függvény grafikonját $x$ tengely körüli megforgatásával kapott forgásfelület térfogata:

$$\pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

mely a jelen esetben

$$\pi \int_1^3 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_1^3 x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x}\right]_1^3 =$$

$$= \pi \left(9 - 6 - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} - 2 - 1\right)\right) = \frac{16}{3}\pi \approx 16{,}76$$