

4. gyakorlat

Függvényhatárértékek és szakadási pontok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2021. szeptember 30.

1. feladat (a)

Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$ határértéket.

1. feladat (a)

Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$ határértéket.

A gyöktelenítés módszerét kell alkalmazni:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

1. feladat (a)

Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$ határértéket.

A gyöktelenítés módszerét kell alkalmazni:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Ezzel:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}) \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1+x} - 1) \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(1+x) - (1-x^2)}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2}}}{\frac{1+x-1}{\sqrt{1+x} + 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x+x^2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2}}}{\frac{x}{\sqrt{1+x} + 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2}{x} \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x) \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2}} = 1 \cdot \frac{\sqrt{1} + 1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = 1 \end{aligned}$$

1. feladat (b)

Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 3x^2 + 7$ határértéket.

1. feladat (b)

Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 3x^2 + 7$ határértéket.

Mivel x^3 a $+\infty$ -be, míg $-3x^2$ a $-\infty$ -be tart, így kiemeljük x^3 -öt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 3x^2 + 7 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^3} \right) = +\infty,$$

mivel a zárójeles kifejezés 1-hez tart.

Másik lehetőség (bár ez kevésbé használható általában):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 3x^2 + 7 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2(x - 3) + 7 = +\infty,$$

mivel x^2 és $(x - 3)$ is a végtelenbe tart.

1. feladat (c)

Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 + 3x^2 + 1}{x^2 - 10x + 1}$ határértéket.

1. feladat (c)

Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 + 3x^2 + 1}{x^2 - 10x + 1}$ határértéket.

A tört számlálója és nevezője is végtelenhez tart, ezért célszerű egyszerűsíteni a törtet x^2 -tel.

1. feladat (c)

Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 + 3x^2 + 1}{x^2 - 10x + 1}$ határértéket.

A tört számlálója és nevezője is végtelenhez tart, ezért célszerű egyszerűsíteni a törtet x^2 -tel.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 + 3x^2 + 1}{x^2 - 10x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3 + 1/x^2}{1 - 10/x + 1/x^2} = -\infty,$$

mivel a tört számlálója $-\infty$ -hez, nevezője 1-hez tart.

1. feladat (d)

Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^7 - 2x^5 + x^2}{x^9 + 3x^4 - 2x^2}$ határértéket.

1. feladat (d)

Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^7 - 2x^5 + x^2}{x^9 + 3x^4 - 2x^2}$ határértéket.

A 0-beli határértéket a legkisebb fokú tagok határozzák meg, így itt is x^2 -tel egyszerűsítjük a törtet:

1. feladat (d)

Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^7 - 2x^5 + x^2}{x^9 + 3x^4 - 2x^2}$ határértéket.

A 0-beli határértéket a legkisebb fokú tagok határozzák meg, így itt is x^2 -tel egyszerűsítjük a törtet:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^7 - 2x^5 + x^2}{x^9 + 3x^4 - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 - 2x^3 + 1}{x^7 + 3x^2 - 2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

1. feladat (e)

Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{\sin(3x)}$ határértéket.

1. feladat (e)

Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{\sin(3x)}$ határértéket.

Felhasználjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$ bármilyen $a \neq 0$ számra:

1. feladat (e)

Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{\sin(3x)}$ határértéket.

Felhasználjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$ bármilyen $a \neq 0$ számra:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{\sin(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(7x)}{7x} \cdot 7x}{\frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(7x)}{7x}}{\frac{\sin(3x)}{3x}} \cdot \frac{7}{3} = \frac{1}{1} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{3}$$

1. feladat (f)

Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ határértéket.

1. feladat (f)

Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ határértéket.

Emlékeztető: $1 - \cos x = 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)$.

1. feladat (f)

Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ határértéket.

Emlékeztető: $1 - \cos x = 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{4} \left(\frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

2. feladat

Számítsuk ki az $x_0 = 1$ pontban a jobb és bal oldali határértékét a

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - 1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$$

függvénynek.

2. feladat

Számítsuk ki az $x_0 = 1$ pontban a jobb és bal oldali határértékét a

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - 1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$$

függvénynek.

$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x - 1 = 1$, és $\lim_{x \rightarrow 1} x^3 - 1 = 0$, így

a jobb oldali határérték: $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x^3 - 1} = +\infty$, mert $x^3 - 1 > 0$,

a bal oldali határérték: $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{x^3 - 1} = -\infty$, mert $x^3 - 1 < 0$.

3. feladat (a)

Határozzuk meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\}, \\ 0, & \text{ha } x = 2, x = 5. \end{cases}$$

3. feladat (a)

Határozzuk meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\}, \\ 0, & \text{ha } x = 2, x = 5. \end{cases}$$

A 2 és az 5 pontokon kívül mindenütt folytonos.

3. feladat (a)

Határozzuk meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\}, \\ 0, & \text{ha } x = 2, x = 5. \end{cases}$$

A 2 és az 5 pontokon kívül mindenütt folytonos. A 2-ben a határérték:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x-5} = \frac{1}{3}$$

létezik, és véges, de nem egyezik meg a függvény értékével ($f(2) = 0$), így ez megszüntethető szakadás.

3. feladat (a)

Határozzuk meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\}, \\ 0, & \text{ha } x = 2, x = 5. \end{cases}$$

A 2 és az 5 pontokon kívül mindenütt folytonos. A 2-ben a határérték:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x-5} = \frac{1}{3}$$

létezik, és véges, de nem egyezik meg a függvény értékével ($f(2) = 0$), így ez megszüntethető szakadás. Az 5-ben a határérték:

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-3}{x-5}$$

nem létezik, de van jobb és bal oldali határérték:

$$\text{jobb oldali határérték: } \lim_{x \rightarrow 5+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5+} \frac{2}{x-5} = +\infty$$

$$\text{bal oldali határérték: } \lim_{x \rightarrow 5-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5-} \frac{2}{x-5} = -\infty$$

Ez szinguláris szakadás.

3. feladat (b)

Határozzuk meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

3. feladat (b)

Határozzuk meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

A 0-n kívül folytonos a függvény, a 0-ban megnézzük a két oldali határértéket:

$$\text{jobb oldali: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\text{bal oldali: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{-x} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = -1$$

Itt tehát a két határérték létezik és véges, de nem egyenlőek, ez egy ugrás szakadás.

3. feladat (c)

Határozzuk meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

3. feladat (c)

Határozzuk meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Itt is csak a 0-ban lehet szakadás, ott a jobb és bal oldali határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x} = 0, \text{ mert } \lim_{x \rightarrow 0^+} -1/x = -\infty \text{ és } \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-1/x} = +\infty, \text{ mert } \lim_{x \rightarrow 0^-} -1/x = +\infty \text{ és } \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$$

Ez egy szinguláris szakadás, mert legalább az egyik oldali határérték nem véges.

Opcionális feladatok

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{x^2} = ?$$

Házi feladatok

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 4x^3 + x}{7 - x^2} = ?$$

Határozzuk meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - x - 6}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\} \\ 1, & \text{ha } x = -2 \text{ vagy } x = 3 \end{cases}$$

Házi feladatok végeredménye

$-\infty$

-2 -ben szinguláris szakadás (3 -ban folytonos)