6. gyakorlat

Differenciálszámítás folytatás

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2021. október 21.

1. feladat (a)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki a $(3x^2 + 4x + 1)^5$ függvény deriváltját.

1. feladat (a)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki a $(3x^2 + 4x + 1)^5$ függvény deriváltját.

Az $f \circ g$ függvénykompozíció deriváltja: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Ezt nevezik láncszabálynak is.

A belső függvény a polinom, a külső függvény az ötödik hatvány, így

$$\left((3x^2 + 4x + 1)^5\right)' = 5 \cdot (3x^2 + 4x + 1)^4 \cdot (6x + 4).$$

1. feladat (b)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki az $(1+\sqrt[3]{x})^3$ függvény deriváltját.

1. feladat (b)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3$ függvény deriváltját.

Itt használjuk, hogy $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$:

$$\left(\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3\right)' = 3 \cdot \left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2 x^{-\frac{2}{3}}.$$

1. feladat (c)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki a $\sqrt{x^2+1}$ függvény deriváltját.

1. feladat (c)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki a $\sqrt{x^2+1}$ függvény deriváltját.

A külső függvény a négyzetgyökvonás, azaz $\frac{1}{2}$-edik hatvány, míg a belső az x^2+1:

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

1. feladat (d)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki az e^{x^4} függvény deriváltját.

1. feladat (d)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki az e^{x^4} függvény deriváltját.

Ebben az esetben az exponenciális függvény a külső, a negyedik hatvány a belső függvény:

$$\left(e^{x^4}\right)' = e^{x^4} \cdot 4x^3.$$

1. feladat (e)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki a $\operatorname{tg}\left(\left(x^2+x\right)^3\right)$ függvény deriváltját!

1. feladat (e)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki a $\operatorname{tg}\left(\left(x^2+x\right)^3\right)$ függvény deriváltját!

Ez már többszörösen összetett függvény, először csak a tangensben levő függvény deriváltját számoljuk ki:

$$\left(\left(x^2+x\right)^3\right)' = 3\left(x^2+x\right)^2 \cdot (2x+1),$$

ami alapján az eredeti függvény deriváltja

$$\left(\operatorname{tg}\left(\left(x^2+x\right)^3\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\left(x^2+x\right)^3\right)} \cdot 3\left(x^2+x\right)^2 \cdot (2x+1).$$

1. feladat (f)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki a $\cos\left(e^{2x+3}\right)$ függvény deriváltját.

1. feladat (f)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki a $\cos\left(e^{2x+3}\right)$ függvény deriváltját.

Ez is többszörösen összetett függvény:

$$\left(\cos\left(e^{2x+3}\right)\right)' = -\sin\left(e^{2x+3}\right) \cdot e^{2x+3} \cdot 2$$

2. feladat

Írjuk fel az $f(x) = \arccos(x)$ függvény $x_0 = \frac{1}{2}$ pontjához tartozó érintő egyenletét.

2. feladat

Írjuk fel az $f(x) = \arccos(x)$ függvény $x_0 = \frac{1}{2}$ pontjához tartozó érintő egyenletét.

A függvény deriváltja:

$$f'(x) = (\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

melynek értéke az adott pontban:

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ennek alapján az érintő egyenlete felhasználva, hogy $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$:

$$\begin{aligned}
y &= f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) \\
y &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{3} \\
y &= -\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

3. feladat (a)

Számítsuk ki az $\dfrac{x^3+3}{x^2-x-2}$ függvény deriváltját.

3. feladat (a)

Számítsuk ki az $\dfrac{x^3+3}{x^2-x-2}$ függvény deriváltját.

Ez egy tört, így a hányados deriválási szabályát alkalmazzuk:

$$\left(\frac{x^3+3}{x^2-x-2}\right)' = \frac{3x^2(x^2-x-2)-(x^3+3)\cdot(2x-1)}{(x^2-x-2)^2} =$$
$$= \frac{x^4-2x^3-6x^2-6x+3}{(x^2-x-2)^2}.$$

3. feladat (b)

Számítsuk ki az $(x^2+1)e^x$ függvény deriváltját.

3. feladat (b)

Számítsuk ki az $(x^2+1)e^x$ függvény deriváltját.

Ez egy szorzat, így a Leibniz-szabályt használjuk:

$$\big((x^2+1)e^x\big)' = 2xe^x + (x^2+1)e^x = (x^2+2x+1)e^x = (x+1)^2e^x.$$

3. feladat (c)

Számítsuk ki a $\sqrt[3]{1-2x}$ függvény deriváltját.

3. feladat (c)

Számítsuk ki a $\sqrt[3]{1-2x}$ függvény deriváltját.

Ez egy összetett függvény:

$$\left(\sqrt[3]{1-2x}\right)' = \frac{1}{3}(1-2x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-2) = -\frac{2}{3}(1-2x)^{-\frac{2}{3}}.$$

3. feladat (d)

Számítsuk ki az $5^x \operatorname{arctg}(x)$ függvény deriváltját.

3. feladat (d)

Számítsuk ki az $5^x \mathrm{arctg}(x)$ függvény deriváltját.

Ez egy szorzat, így a Leibniz-szabályt és azt használjuk, hogy
$(a^x)' = a^x \ln a$ és $(\mathrm{arctg}(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$:

$$(5^x \mathrm{arctg}(x))' = 5^x \ln 5 \cdot \mathrm{arctg}(x) + 5^x \frac{1}{1+x^2} = 5^x \mathrm{arctg}(x) \ln 5 + \frac{5^x}{1+x^2}.$$

3. feladat (e)

Számítsuk ki az $x \sin(x) \ln(x)$ függvény deriváltját.

3. feladat (e)

Számítsuk ki az $x \sin(x) \ln(x)$ függvény deriváltját.

Ez három függvény szorzata, először csak az első szorzatot deriváljuk:

$$(x \sin(x))' = \sin(x) + x \cos(x),$$

mellyel a teljes szorzat:

$$\begin{aligned}(x \sin(x) \ln(x))' &= (x \sin(x))' \cdot \ln(x) + x \sin(x) \frac{1}{x} = \\ &= (\sin(x) + x \cos(x)) \ln(x) + \sin(x).\end{aligned}$$

3. feladat (f)

Számítsuk ki a $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ függvény deriváltját.

3. feladat (f)

Számítsuk ki a $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ függvény deriváltját.

Összetett függvény:

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{2+x^{-\frac{1}{2}}}{4\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$$

3. feladat (g)

Számítsuk ki a $\sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}$ függvény deriváltját.

3. feladat (g)

Számítsuk ki a $\sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}$ függvény deriváltját.

Ez is egy összetett függvény, először csak a belső függvényt deriváljuk, melyben egy szorzat is van:

$$\left(1+x\sqrt{x+3}\right)' = 1\cdot\sqrt{x+3}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+3}},$$

felhasználva, hogy $\left(\sqrt{x+3}\right)' = \frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$ (ez is egy összetett függvény). Így az eredeti függvény deriváltja:

$$\left(\sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}\right)' = \frac{1}{3}\left(1+x\sqrt{x+3}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt{x+3}+\frac{x}{2\sqrt{x+3}}\right).$$

Házi feladat

Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltjait.

(a) $\sqrt[3]{\sin(2x+1)}$,

(b) $3xe^{3x}$,

(c) $\dfrac{\mathrm{tg}(5x)}{3-2x}$.

Házi feladat megoldások

(a) $\dfrac{2\cos(2x+1)}{3\sqrt[3]{\sin^2(2x+1)}}$,

(b) $(9x+3)e^{3x}$,

(c) $\dfrac{\frac{15-10x}{\cos^2(5x)} + 2\mathrm{tg}(5x)}{(3-2x)^2}$.