

# 7. gyakorlat

## Monotonitás és szélsőértékek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2021. október 28.

# 1. feladat

Adjuk meg azt a legbővebb intervallumot, amelyen az

$$f(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény szigorúan monoton.

# 1. feladat

Adjuk meg azt a legbővebb intervallumot, amelyen az

$$f(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény szigorúan monoton.

A függvény deriváltja a hányados deriválási szabályával:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (3x^2 + 1) - x^3 \cdot (6x + 0)}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2}{(3x^2 + 1)^2} \geq 0,$$

így a függvény monoton nő  $\mathbb{R}$ -en.

A függvény deriváltja csak a 0-ban nulla, tehát szigorúan pozitív a  $(-\infty, 0)$  és a  $(0, +\infty)$  intervallumon, tehát ezen intervallumokon a függvény szigorúan monoton nő. Mivel a függvény folytonos a 0-ban, így ezekből következik, hogy a teljes  $\mathbb{R}$ -en a függvény szigorúan monoton nő.

## 2. feladat

Határozzuk meg az

$$f(x) = x - \ln(1 + x) \quad (x \in (-1, +\infty))$$

függvény lokális szélsőérték helyeit és lokális szélsőértékeit.

## 2. feladat

Határozzuk meg az

$$f(x) = x - \ln(1+x) \quad (x \in (-1, +\infty))$$

függvény lokális szélsőérték helyeit és lokális szélsőértékeit.

Lokális szélsőérték csak ott lehet, ahol a függvény deriváltja nulla:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \cdot 1 = \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x},$$

ami csak a nullában 0. Tehát a 0 az egyetlen lehetséges szélsőérték hely.

A derivált a  $(-1, 0)$  intervallumban negatív, így itt monoton csökken.

a  $(0, +\infty)$  intervallumban pozitív, így itt monoton nő.

Tehát a 0 lokális minimum hely.

Ezt a második deriváltból is megkaphatjuk:

$$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)' = -(-1) \cdot (1+x)^{-2} \cdot 1 = \frac{1}{(1+x)^2},$$

ami a 0-ban:  $f''(0) = 1 > 0$ , azaz itt lokális minimum van.

A lokális minimum értéke:  $f(0) = 0 - \ln(1+0) = 0$ .

### 3. feladat

Határozzuk meg az  $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$  függvény monotonitási intervallumait, valamint lokális szélsőérték helyeit és lokális szélsőértékeit.

### 3. feladat

Határozzuk meg az  $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$  függvény monotonitási intervallumait, valamint lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit.

Először lederiváljuk a függvényt:

$$f'(x) = 5x^4 - 5 \cdot 4x^3 + 5 \cdot 3x^2 = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2 \cdot (x^2 - 4x + 3).$$

Nullhelyek: 0, és az  $x^2 - 4x + 3 = 0$  másodfokú egyenlet gyökei: 1 és 3.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'$	+	0	+	0	-	0	+
$f$	mon. nő			lok. max.	mon. csök.	lok. min.	mon. nő

$x = 0$  nem lokális szélsőérték hely

$x = 1$  lokális maximum hely, a lokális maximum értéke:  $f(1) = 2$

$x = 3$  lokális minimum hely, a lokális minimum értéke  $f(3) = -26$

A szélsőértékek típusát általában a második deriváltból is leolvashatjuk:

$$f''(x) = (5x^4 - 20x^3 + 15x^2)' = 20x^3 - 60x^2 + 30x$$

$f''(0) = 0$ , ebből nem tudjuk megállapítani, hogy van-e lokális szélsőérték

$f''(1) = -10 < 0$ , így ez lokális maximum hely

$f''(3) = 90 > 0$ , így ez lokális minimum hely

## 4. feladat

Határozzuk meg az

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \quad (x \in [-1, 5])$$

függvény abszolút maximumát és minimumát (ha azok léteznek), és mondjuk meg azt is, hogy hol veszi fel a szélsőértékeket.



## 4. feladat

Határozzuk meg az

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \quad (x \in [-1, 5])$$

függvény abszolút maximumát és minimumát (ha azok léteznek), és mondjuk meg azt is, hogy hol veszi fel a szélsőértékeket.

Abszolút szélsőérték (minimum vagy maximum) lokális szélsőértéknél vagy az intervallum szélein lehet.

Lokális szélsőérték ott lehet, ahol a derivált 0:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12,$$

ennek a gyökei 1 és  $-2$ , de a  $-2$  nincs az értelmezési tartományban.

A második derivált:  $f''(x) = 12x + 6$ , így  $f''(1) = 18 > 0$ , azaz az 1 lokális minimumhely, itt a függvény értéke:  $f(1) = \underline{-6}$ .

Az intervallum szélein:  $f(-1) = \underline{14}$  és  $f(5) = \underline{266}$ .

Abszolút minimum:  $-6$  ( $x = 1$  helyen veszi fel).

Abszolút maximum:  $266$  ( $x = 5$  helyen veszi fel).

## 5. feladat

Határozzuk meg az  $f(x) = 2x + \frac{200}{x}$  ( $x \in (0, +\infty)$ ) függvény abszolút maximumát és minimumát (ha azok léteznek), és mondjuk meg azt is, hogy hol veszi fel a szélsőértékeket.

## 5. feladat

Határozzuk meg az  $f(x) = 2x + \frac{200}{x}$  ( $x \in (0, +\infty)$ ) függvény abszolút maximumát és minimumát (ha azok léteznek), és mondjuk meg azt is, hogy hol veszi fel a szélsőértékeket.

Először a lokális szélsőértékeket határozzuk meg, amihez a függvény deriváltja:

$$f'(x) = 2 - \frac{200}{x^2},$$

melynek nullhelye:  $x^2 = 100$  esetén, azaz  $x = \pm 10$ .

De csak a  $+10$  esik az értelmezési tartományba.

$f''(x) = -(-2)\frac{200}{x^3} = \frac{400}{x^3}$ , tehát  $f''(10) > 0$ , ez lokális minimum.

A lokális minimum értéke:  $f(10) = 40$ .

Az intervallum széléin határértékeket számolunk:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x + \frac{200}{x} = 0 + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \frac{200}{x} = +\infty + 0 = +\infty$$

Az abszolút minimum  $40$ , melyet  $x = 10$  esetén vesz fel, és abszolút maximuma nincs, mert tetszőlegesen nagy értéket felvesz.

## 6. feladat

Magyarországon a teljes lakosság 1 év alatt összesen  $10^{13}$  forintnyi jövedelmet kap. Tudjuk, hogy ha a keresetek  $(100y)\%$ -át kellene jövedelemadóként befizetni, akkor a lakosság a befizetendő adó  $(100y^3)\%$ -át elcsalná (nem fizetné be). Ilyen feltételek mellett mekkorára kellene az adókulcsot állítani, hogy a lehető legtöbb pénz folyjon be?

## 6. feladat

Magyarországon a teljes lakosság 1 év alatt összesen  $10^{13}$  forintnyi jövedelmet kap. Tudjuk, hogy ha a keresetek  $(100y)\%$ -át kellene jövedelemadóként befizetni, akkor a lakosság a befizetendő adó  $(100y^3)\%$ -át elcsalná (nem fizetné be). Ilyen feltételek mellett mekkorára kellene az adókulcsot állítani, hogy a lehető legtöbb pénz folyjon be?

A keresetek  $(100y)\%$ -a az összes jövedelem  $y$ -szorososa, azaz  $10^{13} \cdot y$  Ft. Ennek a  $(100y^3)\%$ -át, azaz  $y^3$ -szeresét elcsalják, ami  $10^{13} \cdot y \cdot y^3$  Ft, így csak  $10^{13}y - 10^{13}y^4$  forint marad. Tehát az

$$f(y) = 10^{13}y - 10^{13}y^4 = 10^{13}(y - y^4)$$

függvény maximumát keressük.

## 6. feladat

Magyarországon a teljes lakosság 1 év alatt összesen  $10^{13}$  forintnyi jövedelmet kap. Tudjuk, hogy ha a keresetek  $(100y)\%$ -át kellene jövedelemadóként befizetni, akkor a lakosság a befizetendő adó  $(100y^3)\%$ -át elcsalná (nem fizetné be). Ilyen feltételek mellett mekkorára kellene az adókulcsot állítani, hogy a lehető legtöbb pénz folyjon be?

A keresetek  $(100y)\%$ -a az összes jövedelem  $y$ -szorososa, azaz  $10^{13} \cdot y$  Ft. Ennek a  $(100y^3)\%$ -át, azaz  $y^3$ -szeresét elcsalják, ami  $10^{13} \cdot y \cdot y^3$  Ft, így csak  $10^{13}y - 10^{13}y^4$  forint marad. Tehát az

$$f(y) = 10^{13}y - 10^{13}y^4 = 10^{13}(y - y^4)$$

függvény maximumát keressük.

$f'(y) = 10^{13}(1 - 4y^3)$ , melynek nullhelye  $y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ -ben van.

$f''(y) = 10^{13}(-12y^2)$ , melyre  $f''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right) < 0$ , tehát ez lokális maximum.

A feladatnak  $0 \leq y \leq 1$ -ra van értelme, de  $f(0) = f(1) = 0$ .

Így a függvény maximuma

$y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 2^{-\frac{2}{3}} \approx 0,630$ -ben van (63,0%-os adókulcs).

## Opcionális feladatok

Legyen

$$f(x) = \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos x + x \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{3x}{2}\right) \quad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Írjuk fel a függvény derivált függvényét. Mutassuk meg, hogy az  $f(x) = 0$  egyenletnek pontosan egy gyöke van a  $(0, \frac{\pi}{6})$  intervallumban.

Egy hajó üzemeltetési költségeit a fűtőanyag-fogyasztás és egyéb kiadások képezik. Az óránként felhasznált fűtőanyag  $A$  értéke függ a sebességtől; az összefüggést az  $A = 0,03v^3$  képlet fejezi ki, ahol  $v$  (km/h) a sebesség; az egyéb kiadások  $B$  forintot tesznek ki (óránként). Határozzuk meg, milyen sebességgel haladjon a hajó, hogy a kilométerenkénti költség a lehető legkisebb legyen. (Vegyük  $B$ -t pl. 480 Ft-nak).

# Házi feladatok

1. Andri mézeskalácsot árul az adventi vásárban. Ha az előállításra  $x$  petákot költ, akkor darabját  $6\sqrt{x}$  petákért tudja eladni. Mennyit költsön az előállításra, hogy a darabonkénti haszna maximális legyen?
2. Gabi mézeskalácsot árul az adventi vásárban. Ha  $x$  petákért adja darabját, akkor az előtte elsétálók  $(60 - 3x)$  százaléka vesz tőle egyet. Mennyiért adja darabját, hogy a bevétele maximális legyen? (Feltehetjük, hogy 1000 vásárló halad el előtte, de ennek nincs jelentősége.)



# Házi feladatok megoldása

1. 9

2. 10