9. gyakorlat

Teljes függvényvizsgálat

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2021. november 11.

Függvényvizsgálat

Adott egy $f(x)$ függvény, megállapítjuk:

- értelmezési tartomány (ÉT)
- zérushely
- paritás
- periodicitás
- értelmezési tartomány szélein határértékek
  - aszimptoták
- első derivált
  - monotonitási tulajdonságok
  - lokális szélsőértékek
- második derivált
  - konvexitás
  - inflexiós pontok
- sematikus ábrázolás
- értékkészlet (ÉK)

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$$

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$

ÉT: $\mathbb{R}$

zérushely: ezt ennél a függvénynél kivételesen nem vizsgáljuk

periódus: nincs (polinom, és így a végtelenben végtelenbe tart, ami nem lehet egy periodikus függvénynél)

paritás: nincs $f(1) = -11$ és $f(-1) = -3$: nem egyenlőek, ellentettek

határértékek:

$$\lim_{x\to\infty} 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2 = \lim_{x\to\infty} x^4 \left(3 - \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{2}{x^4}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2 = \lim_{x\to-\infty} x^4 \left(3 - \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{2}{x^4}\right) = +\infty$$

Ferde aszimptota lehetne, de

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2}{x} = \lim_{x\to\infty} 3x^3 - 4x^2 - 12x + \frac{2}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^3 \left(3 - \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{2}{x^4}\right) = +\infty$$

mutatja, hogy nincsen. Hasonlóan a $-\infty$-ben sincs.

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$

$$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 - 4 \cdot 3x^2 - 12 \cdot 2x = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2)$$
$$f''(x) = 12 \cdot 3x^2 - 12 \cdot 2x - 24 = 36x^2 - 24x - 24$$

első derivált nullhelyei: $0, 2, -1$

második derivált nullhelyei: $\dfrac{1}{3} \pm \dfrac{\sqrt{7}}{3}$,

legyen $a = \dfrac{1}{3} - \dfrac{\sqrt{7}}{3} \approx -0{,}55$ és $b = \dfrac{1}{3} + \dfrac{\sqrt{7}}{3} \approx 1{,}22$

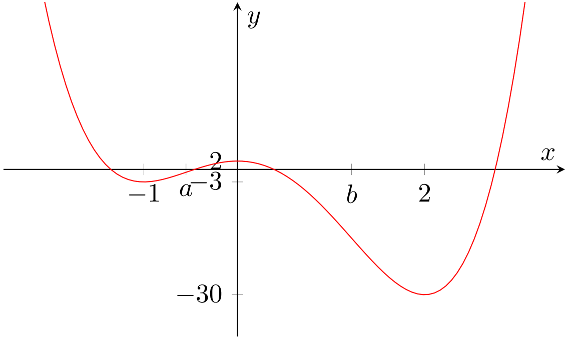
<table>
<tr><th></th><th>$(-\infty, -1)$</th><th>-1</th><th>$(-1, a)$</th><th>a</th><th>$(a, 0)$</th><th>0</th><th>$(0, b)$</th><th>b</th><th>$(b, 2)$</th><th>2</th><th>$(2, +\infty)$</th></tr>
<tr><td>f'</td><td>$-$
mon. csök.</td><td>0
min.</td><td colspan="3">$+$
mon. nő</td><td>0
max.</td><td colspan="3">$-$
mon. csök.</td><td>0
min.</td><td>$+$
mon. nő</td></tr>
<tr><td>f''</td><td colspan="3">$+$
konvex</td><td>0
i. p.</td><td colspan="3">$-$
konkáv</td><td>0
i. p.</td><td colspan="3">$+$
konvex</td></tr>
</table>

lokális minimumok: $f(-1) = -3$ és $f(2) = -30$

lokális maximum: $f(0) = 2$

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,a)$	a	$(a,0)$	0	$(0,b)$	b	$(b,2)$	2	$(2,+\infty)$
f'	$-$ mon. csök.	0 min.	$+$ mon. nő			0 max.	$-$ mon. csök.			0 min.	$+$ mon. nő
f''	$+$ konvex			0 i. p.	$-$ konkáv			0 i. p.	$+$ konvex		



ÉK: $[-30,+\infty)$

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2$$

$f(x) = \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2$

ÉT: $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ (mert $2x+1 \neq 0$)

zérushely: $x = 1$

periódus: nincs (egyetlen zérushely miatt)

paritás: nincs ($f(1) = 0$, de $f(-1) \neq 0$)

határértékek:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2 = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2 = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

A függvénynek $\pm\infty$-ben az $y = \frac{1}{4}$ vízszintes aszimptotája van.

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}+} \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2 = \lim_{x\to-\frac{1}{2}+} \frac{\frac{9}{4}}{(2x+1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}-} \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2 = \lim_{x\to-\frac{1}{2}-} \frac{\frac{9}{4}}{(2x+1)^2} = +\infty$$

A függvénynek $x = -\frac{1}{2}$-ben függőleges aszimptotája van.

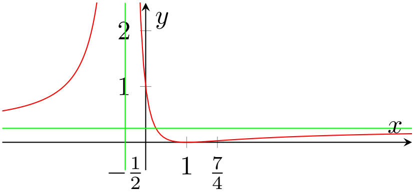
$f(x) = \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2$

$$f'(x) = 2\frac{x-1}{2x+1} \cdot \frac{2x+1-(x-1)\cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{6(x-1)}{(2x+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{6(2x+1)^3 - 6(x-1)\cdot 3(2x+1)^2 \cdot 2}{(2x+1)^6} = \frac{6(2x+1)-36(x-1)}{(2x+1)^4} =$$

$$= \frac{-24x+42}{(2x+1)^4}$$

	$x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 1$	1	$1 < x < \frac{7}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{4} < x$
f'	$+$ mon. nő	n. é. n. é.	$-$ mon. csök.	0 min.	$+$ monoton nő		
f''	$+$ konvex	n. é. n. é.	$+$ konvex			0 i. p.	$-$ konkáv



lokális minimum: $f(1) = 0$

ÉK: $[0, +\infty)$

$f(x) = \frac{x^2-3}{2-x}$

$f(x) = \frac{x^2-3}{2-x}$

ÉT: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

zérushely: $x^2 - 3 = 0$, azaz $x = \pm\sqrt{3}$

periódus: nincs (pl. a zérushelyek miatt)

paritás: nincs (pl. az értelmezési tartomány miatt)

határértékek:

$$\lim_{x\to 2+} \frac{x^2-3}{2-x} = \lim_{x\to 2+} \frac{1}{2-x} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 2-} \frac{x^2-3}{2-x} = \lim_{x\to 2-} \frac{1}{2-x} = +\infty$$

Az $x = 2$-ben függőleges aszimptota van.

$f(x) = \frac{x^2-3}{2-x}$

határértékek a végtelenben:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3}{2-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\frac{3}{x}}{\frac{2}{x}-1} = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3}{2-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-\frac{3}{x}}{\frac{2}{x}-1} = +\infty$$

Nézzük meg, hogy a végtelenben van-e ferde aszimptota:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-3}{2-x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{2x-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{3}{x^2}}{\frac{2}{x}-1} = -1$$
$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{2-x} + x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3+2x-x^2}{2-x} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{3}{x}}{\frac{2}{x}-1} = -2$$

Tehát az aszimptota egyenlete a $+\infty$-ben $y = -x - 2$.

Hasonló számolással kapjuk, hogy a $-\infty$-ben is ez az aszimptota.

$f(x) = \frac{x^2-3}{2-x}$

$$f'(x) = \frac{2x(2-x) - (x^2-3)\cdot(-1)}{(2-x)^2} = \frac{-x^2+4x-3}{(2-x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-2x+4)\cdot(2-x)^2 - (-x^2+4x-3)\cdot 2(2-x)\cdot(-1)}{(2-x)^4} =$$

$$= \frac{(-2x+4)\cdot(2-x) + 2(-x^2+4x-3)}{(2-x)^3} = \frac{2}{(2-x)^3}$$

Az első derivált nullhelyei $1, 3$, míg a másodiknak nincs.

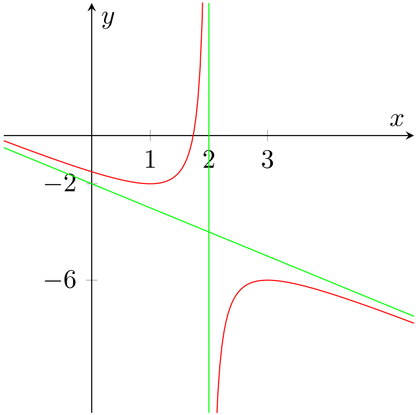
	$x<1$	1	$1<x<2$	2	$2<x<3$	3	$3<x$
f'	$-$	0	$+$	n. é.	$+$	0	$-$
	mon. csök.	min.	mon. nő	n. é.	mon. nő	max.	mon. csök.
f''	$+$			n. é.	$-$		
	konvex			n. é.	konkáv		

lokális minimum: $f(1) = -2$
lokális maximum: $f(3) = -6$

$f(x) = \frac{x^2-3}{2-x}$

	$x < 1$	1	$1 < x < 2$	2	$2 < x < 3$	3	$3 < x$	
f'	$-$	0	$+$	n. é.	$+$	0	$-$	
	mon. csök.	min.	mon. nő	n. é.	mon. nő	max.	mon. csök.	lokális
f''		$+$		n. é.		$-$		
		konvex		n. é.		konkáv		

minimum: $f(1) = -2$, lokális maximum: $f(3) = -6$



ÉK: $(-\infty, -6] \cup [-2, +\infty)$

$f(x) = x^x$

$f(x) = x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x \ln x}$

ÉT: $(0, +\infty)$ (illetve negatív egész számokon is értelmezhető)

zérushely: nincs (a függvény mindenütt pozitív)

periódus: nincs (a függvény csak a pozitív számokon van értelmezve)

paritás: nincs (a függvény csak a pozitív számokon van értelmezve)

határértékek:

$\lim_{x \to 0+} x^x = \lim_{x \to 0+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$, mert

$$\lim_{x \to 0+} x \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \rightsquigarrow \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0+} -x = 0 \text{ (L'Hospital-szabály)}$$

$\lim_{x \to +\infty} x^x = +\infty$

Így a $+\infty$-ben lehetne ferde aszimptota, de

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^x}{x} = \lim_{x \to \infty} x^{x-1} = +\infty$$

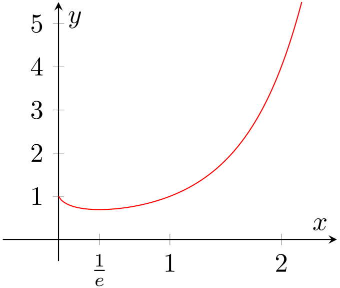
miatt nincsen.

$f(x) = x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x \ln x}$

$$f'(x) = e^{x\ln x}\left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) = e^{x\ln x}(\ln x + 1)$$
$$f''(x) = e^{x\ln x}(\ln x + 1)^2 + e^{x\ln x}\frac{1}{x}$$

Az első derivált $\ln x + 1 = 0$ esetén nulla, azaz $x = \frac{1}{e}$ a nullhely.
A második derivált a pozitív számokon pozitív.

	$0 < x < \frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e} < x$
f'	$-$ mon. csök.	0 min.	$+$ mon. nő
f''		$+$ konvex	



lokális minimum: $f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{e}} \approx 0{,}692$

ÉK: $\left[e^{-\frac{1}{e}}, +\infty\right)$

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

ÉT: $\mathbb{R}$ $(1 + e^x > 0)$.

zérushely: nincs $(e^x \neq 0)$

periódus: nincs (pl. látni fogjuk, hogy monoton nő)

paritás: nincs $(f(1) \approx 0{,}73, f(-1) \approx 0{,}27)$

határértékek:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^x}+1} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{0}{1+0} = 0, \text{ mert } \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Tehát a függvénynek vízszintes aszimptotái vannak:
a $+\infty$-ben az $y = 1$ egyenes
a $-\infty$-ben az $y = 0$ egyenes

$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - e^x \cdot 2(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot 2e^x}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$$

az első derivált mindenütt pozitív
a második $e^x = 1$, azaz $x = 0$ esetén 0

	$x < 0$	0	$0 < x$
f'		$+$ monoton nő	
f''	$+$ konvex	0 i. p.	$-$ konkáv

ÉK: $(0, 1)$