3. vizsga végeredményei

4. lokális minimuma

5. (c)

6. Ha $x \neq 3$, akkor a függvény folytonos.

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} e^{-\frac{1}{(x-3)^2}} = 0, \text{ mert } \lim_{x\to 3} -\frac{1}{(x-3)^2} = -\infty \text{ és } \lim_{x\to -\infty} e^x = 0.$$

Így $x = 3$-ban megszüntetető szakadás van.

7. A függvény: $f(x) = x(12 - x^2) = 12x - x^3$, melynek deriváltja: $f'(x) = 12 - 3x^2$, mely $x = \pm 2$-ben tűnik el, de csak $+2$ értelmes.
Ez lokális maximum, hiszen a második derivált: $f''(x) = -6x$ negatív.
A függvénynek $0 \leq x \leq \sqrt{12}$ esetén van értelme, a széleken a függvény: $f(0) = f(\sqrt{12}) = 0$, tehát a lokális maximum globális is.

8. ÉT: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, zérushely: nincs $(5 + x^2 > 0)$, páratlan, periódus nincsen

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, ferde aszimptota $y = \frac{1}{2}x$ a $\pm\infty$-ben

$\lim\limits_{x\to 0\pm} f(x) = \pm\infty$, így $x = 0$ függőleges aszimptota

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 5}{2x^2}$, mely $\pm\sqrt{5}$-ben tűnik el, $f''(x) = \dfrac{5}{x^3}$, mely 0-ban nincs értelmezve

	$(-\infty, -\sqrt{5})$	$-\sqrt{5}$	$(-\sqrt{5}, 0)$	0	$(0, \sqrt{5})$	$\sqrt{5}$	$(\sqrt{5}, +\infty)$
f'	$+$	0	$-$	n.é.	$-$		$+$
	nő	max	csök.	n.é.	csök.	min	nő
f''	$-$			n.é.	$+$		
	konkáv			n.é.	konvex		

ÉK: $\left(-\infty, -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}, +\infty\right)$

9. $$\int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1 + x^2} \,\mathrm{d}x = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$$

A feladat esetében $C = 3$, így $f(x) = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + 3$.

10. $$\int_0^{\pi^2} \cos\sqrt{x} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \cos t \cdot 2t \,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} t \cos t \,\mathrm{d}t = 2\left([t \sin t]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin t \,\mathrm{d}t \right) = 2(0 - [-\cos t]_0^{\pi}) =$$
$$= -4$$

$t = \sqrt{x}$
$x = t^2$
$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t$
$\mathrm{d}x = 2t \,\mathrm{d}t$

határok:
$x = \pi^2 \rightsquigarrow t = \pi$
$x = 0 \rightsquigarrow t = 0$

$f(t) = t \qquad f'(t) = 1$
$g'(t) = \cos t \qquad g(t) = \sin t$

11. A függvény deriváltja: $f'(x) = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x}$, így az ívhossz lineáris helyettesítéssel:

$$\int_0^7 \sqrt{1 + (3\sqrt{x})^2} \,\mathrm{d}x = \int_0^7 \sqrt{1 + 9x} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} (1 + 9x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^7 = \frac{2}{27} \left[(1 + 9x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^7 = \frac{1022}{27} \approx 37{,}85$$