4. vizsga végeredményei

4. szigorúan monoton csökken

5. (b)

6. Ha $x \neq 2,3$, akkor a függvény folytonos. A $2,3$-ban kiszámoljuk a függvény határértékét:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \frac{-1}{\sqrt{3}-2} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \approx 3{,}732,$$

ami nem egyezik meg a függvény értékével (4), tehát ez megszüntethető szakadás.

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1)-4} = \lim_{x\to 3} \sqrt{x+1}+2 = 4,$$

ami éppen a függvényérték, itt tehát folytonos a függvény.

7. A függvény: $f(x) = 8\sqrt{x} + 2(16-x) = 8\sqrt{x} + 32 - 2x$, melynek deriváltja: $f'(x) = \frac{8}{2\sqrt{x}} - 2$, mely $x = 4$-ben tűnik el. A függvény értéke itt: $f(4) = 40$.
Ez lokális maximum, hiszen a második derivált: $f''(x) = -2x^{-\frac{3}{2}}$ negatív itt.
A függvénynek $0 \leq x \leq 16$ esetén van értelme, a széleken a függvény: $f(0) = f(16) = 32$, tehát a lokális maximum globális is.

8. ÉT: $\mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$, zérushely: nincs ($e^x > 0$), paritás, periódus nincsen

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, így $y = 1$ vízszintes aszimptota a $+\infty$-ben

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, így $y = 0$ vízszintes aszimptota a $-\infty$-ben

$\lim\limits_{x\to\ln 2\pm} f(x) = \pm\infty$, így $x = \ln 2$ függőleges aszimptota

$f'(x) = \dfrac{-2e^x}{(e^x-2)^2}$, mely negatív (monoton csökken), ahol értelmes

$f''(x) = \dfrac{2e^{2x}+4e^x}{(e^x-2)^3}$, ami $\ln 2$-ben nincs ért., előtte neg. (konkáv), utána poz. (konvex)

ÉK: $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

9.
$$f'(x) = \frac{\sin(3x)}{3} + 2$$
$$f(x) = -\frac{\cos(3x)}{9} + 2x + \frac{10}{9}$$

10. $$\int \frac{5x+4}{2x^2+3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{5}{4}\frac{4x}{2x^2+3} + \frac{4}{3}\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{4}\ln(2x^2+3) + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right) + C$$

11. Az egyenes a grafikont a $\sin x = 0{,}5$ ($x \in [0,\pi]$) megoldásaiban metszi, azaz $x = \frac{\pi}{6}$ és $x = \frac{5\pi}{6}$ helyeken. Így a kérdéses terület:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin x - 0{,}5\,\mathrm{d}x = [-\cos x - 0{,}5x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = -\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{5\pi}{12} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \approx 0{,}685$$