5. vizsga végeredményei

4. abszolút/globális maximuma

5. (c)

6. Főegyüttható 3, konstanstag 4, így a lehetséges racionális gyökök: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}$.
A -1 gyök, így $x+1$ kiemelhető: $3x^4 + 7x^3 - 6x^2 - 6x + 4 = (x+1)(3x^3 + 4x^2 - 10x + 4)$.
Ennek gyöke a $\frac{2}{3}$:
$$3x^3 + 4x^2 - 10x + 4 = \left(x - \tfrac{2}{3}\right)\left(3x^2 + 6x - 6\right)$$
A másodfokú polinom gyökei: $-1 \pm \sqrt{3}$.

7. A függvény: $f(x) = (5-x)(12+3x) = 60 + 3x - 3x^2$, melynek deriváltja:
$f'(x) = 3 - 6x$, mely $x = \frac{1}{2}$-ben tűnik el. A függvény értéke itt: $f(\frac{1}{2}) = 60{,}75$.
Ez lokális maximum, hiszen a második derivált: $f''(x) = -6$ negatív.
A függvénynek $0 \le x \le 5$ esetén van értelme, a széleken a függvény:
$f(0) = 60, f(5) = 0$, tehát a lokális maximum globális is.

8. ÉT: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, zérushely: $-\sqrt[3]{4}$, paritás, periódus nincsen
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, ferde aszimptota: $y = x$ a $\pm\infty$-ben
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, így $x = 0$ függőleges aszimptota
$f'(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^3}$, mely 2-ben tűnik el, és így $(0,2)$-ben monoton csökken, másutt nő
$f''(x) = \dfrac{24}{x^4}$, ami pozitív (függvény konvex), ahol értelmes
ÉK: $\mathbb{R}$

9. $$\int 3x^2 e^{3x}\,\mathrm{d}x = x^2 e^{3x} - \int 2x e^{3x}\,\mathrm{d}x = x^2 e^{3x} - 2\left(\frac{xe^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}\,\mathrm{d}x\right) = x^2 e^{3x} - \frac{2xe^{3x}}{3} + \frac{2e^{3x}}{9} + C$$

$f(x) = x^2$ $\quad f'(x) = 2x$ $\qquad\qquad f(x) = x$ $\quad f'(x) = 1$
$g'(x) = 3e^{3x}$ $\quad g(x) = e^{3x}$ $\qquad\qquad g'(x) = e^{3x}$ $\quad g(x) = \frac{e^{3x}}{3}$

10. $$\int_1^{e^\pi} \frac{\cos(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = [\sin(\ln x)]_1^{e^\pi} = \sin(\pi) - \sin(0) = 0$$

11. Az egyenes a grafikont a $\sqrt{x+3} = \frac{x+9}{5}$ egyenlet megoldásaiban metszi. Ezt négyzetre emelve másodfokú egyenletet kapunk:
$$x + 3 = \frac{x^2 + 18x + 81}{25}, \text{ azaz } 25x + 75 = x^2 + 18x + 81, \text{ azaz } 0 = x^2 - 7x + 6,$$
melynek gyökei 1 és 6. E két érték között integráljuk a két függvény különbségét:
$$\int_1^6 \sqrt{x+3} - \frac{x+9}{5}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}\frac{x^2}{2} - \frac{9}{5}x\right]_1^6 = \frac{18}{5} - \frac{103}{30} = \frac{1}{6}$$