14. előadás

Középértéktételek, aszimptoták és konvexitás

Horváth Márton

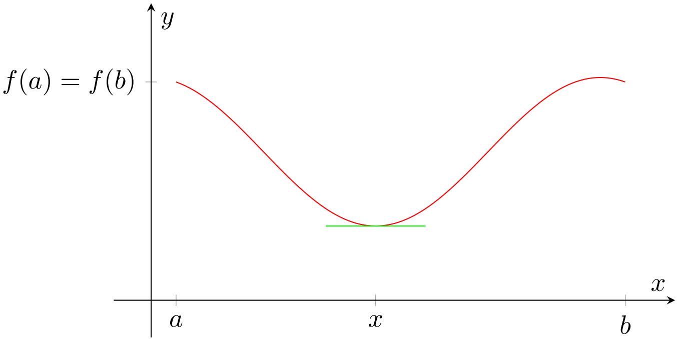
BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2022. november 2.

Rolle-tétel

Ha az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumon folytonos, az (a, b)-n differenciálható, és $f(a) = f(b)$, akkor van olyan $x \in (a, b)$, hogy $f'(x) = 0$ (az érintő vízszintes).

Bizonyítás:
A Weierstrass-tétel szerint a függvény felveszi a minimumát és a maximumát, ezek közül legalább az egyik belső pont. Ez lokális szélsőérték, így a derivált nulla.



Lagrange-tétel

Ha az $f(x)$ függvény az $[a,b]$ intervallumon folytonos, az (a,b)-n differenciálható, akkor van olyan $x \in (a,b)$, hogy

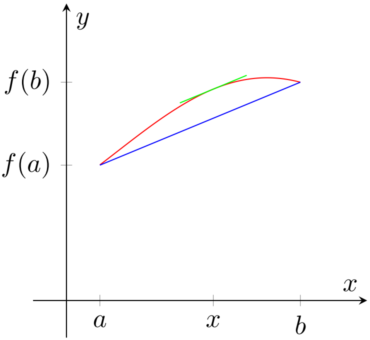
$$f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Bizonyítás:

A Rolle-tételt alkalmazzuk az

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

függvényre.



$$0 = F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

és

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(b) - (f(b)-f(a)) = f(a) = F(a)$$

Cauchy-tétel

Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvények az $[a, b]$ intervallumon folytonosak, az (a, b)-n differenciálhatóak és $g'(x) \neq 0$ $x \in (a, b)$ esetén, akkor van olyan $x \in (a, b)$, hogy

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Bizonyítás:
A Rolle-tételt alkalmazzuk az

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x)$$

függvényre.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$$

$$F(b) - F(a) = \left(f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(b) \right) - \left(f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(a) \right) =$$

$$= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \left(g(b) - g(a) \right) = 0$$

Akikről eddig szó volt

Michel Rolle (1652–1719) francia

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) olasz-francia

Augustin Louis Cauchy (1789–1857) francia

Guillaume de l'Hospital (1661–1704) francia

Brook Taylor (1685–1731) angol

Étienne Bézout (1730–1784) francia

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) német

Bernard Bolzano (1781–1848) szudétanémet

Karl Weierstrass (1815–1897) német

Aszimptoták

Az aszimptota olyan egyenes, melyet a függvény grafikonja tetszőlegesen megközelít.

Ez háromféle lehet:

- függőleges aszimptota
- vízszintes aszimptota
- ferde aszimptota

Függőleges aszimptota

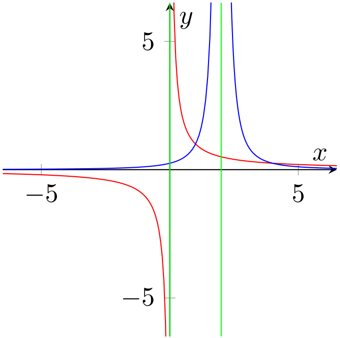
Az $f(x)$ függvénynek függőleges aszimptotája van az x_0 pontban, ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, esetleg csak az egyik oldali határérték.

Ekkor az $x = x_0$ egyenletű egyenes az aszimptota.

Példák:

Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvénynek az $x_0 = 0$ pontban függőleges aszimptotája van.
Egyenlete: $x = 0$.

Az $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ függvénynek az $x_0 = 2$ pontban függőleges aszimptotája van.
Egyenlete: $x = 2$.



Vízszintes aszimptota

Az $f(x)$ függvénynek vízszintes aszimptotája van, ha $\pm\infty$-ben a határértéke egy véges szám.

Ha $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, akkor az $y = a$ egyenletű egyenes a vízszintes aszimptota a $+\infty$-ben.

A $-\infty$-ben hasonlóan definiáljuk.

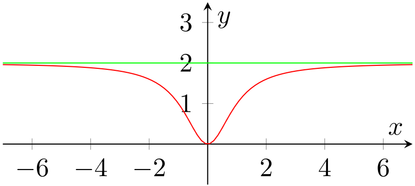
Példa:

Az $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ függvénynek a határértéke a végtelenben:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} = 2,$$

így az $y = 2$ egyenletű egyenes a vízszintes aszimptotája a $+\infty$-ben.

A $-\infty$-ben hasonlóan ugyanez az egyenes.



Ferde aszimptota

Az $f(x)$ függvénynek ferde aszimptotája van, ha a függvénygrafikon az $y = ax + b$ egyeneshez „simul'' a végtelenben.

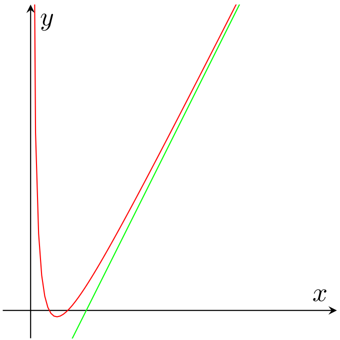
Az a és a b együtthatók kiszámítása:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax)$$

A $-\infty$-ben hasonlóan számítható.

Ha valamelyik határérték nem létezik vagy végtelen, akkor nincs ferde aszimptota.



Az a értékét gyakran a L'Hospital-szabály segítségével számolhatjuk ki:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \rightsquigarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to\infty} f'(x)$$

Ferde aszimptota – példák

Az $f(x) = \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{x}$ függvény ferde aszimptotái

Ferde aszimptota – példák

Az $f(x) = \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{x}$ függvény ferde aszimptotái

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2-6x+4}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{6}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = 2$$
$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2 - 6x + 4}{x} - 2x\right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 6x + 4 - 2x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-6x + 4}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(-6 + \frac{4}{x}\right) = -6$$

Tehát a ferde aszimptota egyenlete: $y = 2x - 6$.
Hasonlóan a $-\infty$-ben is.

Az $f(x) = x^2$ függvény ferde aszimptotái

Ferde aszimptota – példák

Az $f(x) = \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{x}$ függvény ferde aszimptotái

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2-6x+4}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-6x+4}{x^2} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{6}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = 2$$
$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2-6x+4}{x} - 2x\right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-6x+4-2x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-6x+4}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(-6 + \frac{4}{x}\right) = -6$$

Tehát a ferde aszimptota egyenlete: $y = 2x - 6$.
Hasonlóan a $-\infty$-ben is.

Az $f(x) = x^2$ függvény ferde aszimptotái

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} x = +\infty,$$

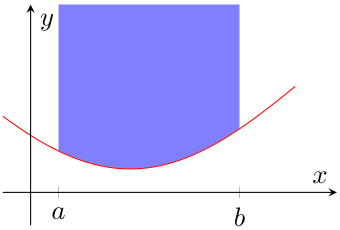
tehát ebben az esetben nem létezik ferde aszimptota.

Konvexitás

Egy $K \subseteq \mathbb{R}^2$ halmaz konvex, ha bármely $P, Q \in K$ pontra a PQ szakasz teljes egészében benne van a K-ban.

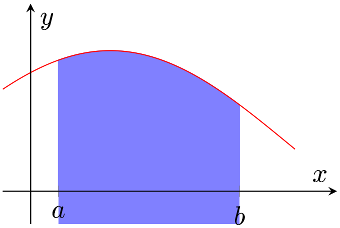
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $[a,b] \subseteq D_f$ intervallumon konvex, ha a grafikonja feletti tartomány konvex:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b] \text{ és } y \geq f(x)\}$$



Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $[a,b] \subseteq D_f$ intervallumon konkáv, ha a grafikonja alatti tartomány konvex:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b] \text{ és } y \leq f(x)\}$$



Ekvivalens tulajdonságok a konvexitásra

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $[a,b] \subseteq D_f$ intervallumon pontosan akkor konvex, ha

- minden $x, y \in [a,b]$-re az $(x, f(x))$ és az $(y, f(y))$ pontokat összekötő szakasz a grafikon felett van, azaz

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda) y) \qquad \text{minden } \lambda \in [0,1]\text{-re.}$$

- a függvénygrafikon az érintő felett halad, azaz

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{minden } x, x_0 \in [a,b] \text{ esetén.}$$

- az érintő meredeksége, azaz $f'(x)$ monoton nő az $[a,b]$ intervallumon.
- $f''(x) \geq 0$ az $[a,b]$ intervallumon.

Ekvivalens tulajdonságok a konkávitásra

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $[a,b] \subseteq D_f$ intervallumon pontosan akkor konkáv, ha

- minden $x, y \in [a,b]$-re az $(x, f(x))$ és az $(y, f(y))$ pontokat összekötő szakasz a grafikon alatt van, azaz

  $$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \le f(\lambda x + (1-\lambda) y) \qquad \text{minden } \lambda \in [0,1]\text{-re.}$$

- a függvénygrafikon az érintő alatt halad, azaz

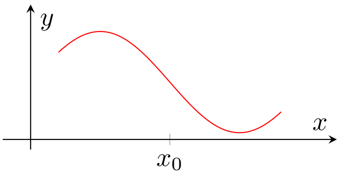
  $$f(x) \le f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{minden } x, x_0 \in [a,b] \text{ esetén.}$$

- az érintő meredeksége, azaz $f'(x)$ monoton csökken az $[a,b]$ intervallumon.
- $f''(x) \le 0$ az $[a,b]$ intervallumon.

Inflexiós pont

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) $x_0 \in D_f$ pontja inflexiós pont, ha a függvény x_0-ban differenciálható, és a függvény x_0-ban konvexitást vált, azaz előtte konkáv, utána konvex vagy fordítva.

Formálisan: van olyan $\delta > 0$, hogy $[x_0 - \delta, x_0]$-ban konkáv és $[x_0, x_0 + \delta]$-ban konvex vagy fordítva.



Példa:
A $\sin x$ függvénynek a π egész számú többszörösei az inflexiós pontjai.

Tétel:
Ha az x_0 inflexiós pont, akkor $f''(x_0) = 0$.

Ez visszafelé nem feltétlenül igaz:

$$f(x) = x^4$$
$$f'(x) = 4x^3$$
$$f''(x) = 12x^2 \text{ így } f''(0) = 0,$$

de a 0 nem inflexiós pont (a függvény mindenütt konvex).

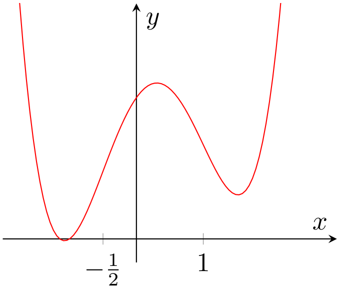
Példa

Az $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 3$ függvény konvexitása.

Példa

Az $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 3$ függvény konvexitása.
Kiszámoljuk a függvény második deriváltját:

$$f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 3$$
$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 2$$
$$f''(x) = 12x^2 - 6x - 6$$



A második derivált nullhelyei:

$$f''(x) = 0$$
$$12x^2 - 6x - 6 = 0$$
$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

A második derivált előjeléből leolvashatjuk a konvexitást:

	$x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 1$	1	$1 < x$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	konvex	inf. pont	konkáv	inf. pont	konvex