4. előadás

Függvények

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2022. szeptember 20.

Monotonitás

Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vagy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény

- monoton nő, ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- szigorúan monoton nő, ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- monoton csökken, ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
- szigorúan monoton csökken, ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- monoton, ha $f(x)$ monoton nő vagy monoton csökken.
- szigorúan monoton, ha $f(x)$ szigorúan monoton nő vagy szigorúan monoton csökken.

Példák:
$f(x) = x$ szigorúan monoton nő.
$g(x) = x^2$ szigorúan monoton csökken $(-\infty, 0]$-n és szigorúan monoton nő $[0, +\infty)$-n, de $\mathbb{R}$-en nem monoton.
$h(x) = [x]$ monoton nő, de nem szigorúan monoton nő.
$i(x) = 2$ monoton nő és monoton csökken.

Ha egy függvény monoton nő és monoton csökken, akkor konstans függvény.

Korlátosság

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ függvény

- alulról korlátos, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) \geq k$ minden $x \in D_f$ esetén (k alsó korlát). $\rightsquigarrow$ legnagyobb alsó korlát
- felülről korlátos, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) \leq K$ minden $x \in D_f$ esetén (K felső korlát). $\rightsquigarrow$ legkisebb felső korlát
- korlátos, ha alulról és felülről korlátos, azaz van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $|f(x)| \leq K$ minden $x \in D_f$ esetén.

Példák:
$f(x) = |x|$ alulról korlátos, legnagyobb alsó korlát a 0, de felülről nem korlátos, így nem is korlátos.
$g(x) = \sin x$ alulról korlátos, legnagyobb alsó korlát -1, felülről korlátos, legkisebb felső korlát a 1, így korlátos is.

Periodicitás

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény periodikus, ha létezik $d \neq 0$ úgy, hogy $x \in D_f$ esetén $x \pm d \in D_f$ és $f(x+d) = f(x)$ (d szerint periodikus).

Ha egy függvény d szerint periodikus, akkor kd szerint is periodikus ($k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$).

A legkisebb pozitív periódus a főperiódus (ha van).

Egy példa, amikor nincs: Dirichlet-függvény:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \\ 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \end{cases}$$

Példák:
$\sin x, \cos x$ 2π szerint periodikus
$\operatorname{tg} x$ π szerint periodikus
$\{x\}$ törtrész függvény 1 szerint periodikus

Paritás

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ függvény

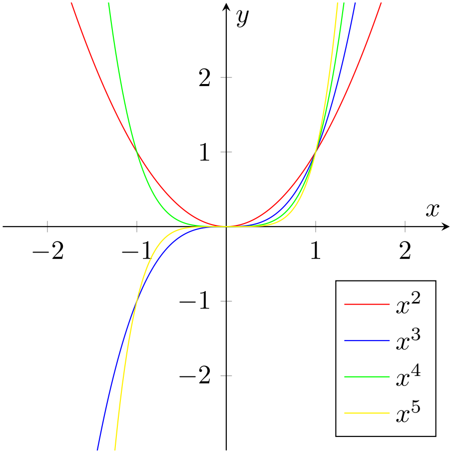
- páros, ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$, és $f(-x) = f(x)$.
  A grafikon az y tengelyre tükrös.
- páratlan, ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$, és $f(-x) = -f(x)$.
  A grafikon az origóra tükrös.

Példák:
$x^2, |x|, \cos x$ páros
$x, x^3, \sin x$ páratlan
x^n páros, ha n páros, és páratlan, ha n páratlan

Függvénygrafikon

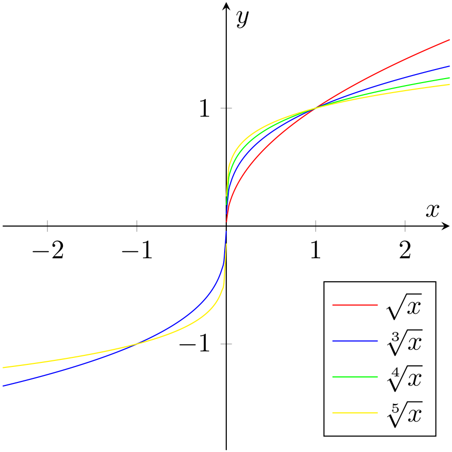
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény grafikonja $\{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$.

Az x^n függvény ($n \in \mathbb{Z}_+$) grafikonja páros n esetén parabolához hasonlít, míg páratlan $n \geq 3$ esetén az x^3 grafikonjához.



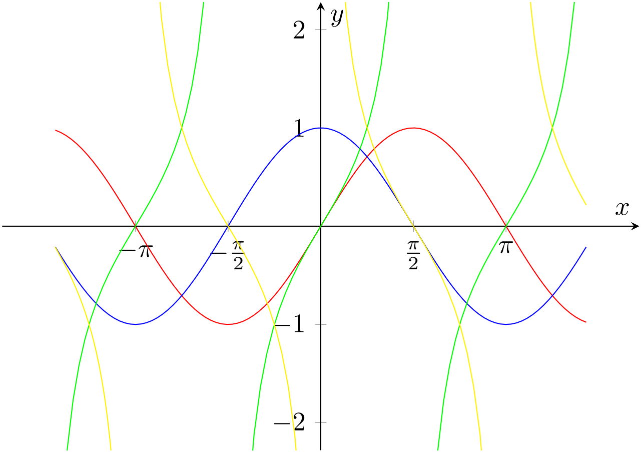
Függvénygrafikon: gyökfüggvények

Az $\sqrt[n]{x}$ függvény páros n esetén csak a nemnegatív értékekre van értelmezve.



Függvénygrafikon: szögfüggvények

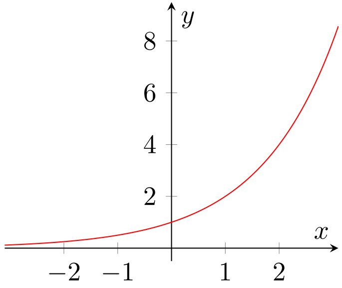
A $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ függvények grafikonjait mindenki jól ismeri:



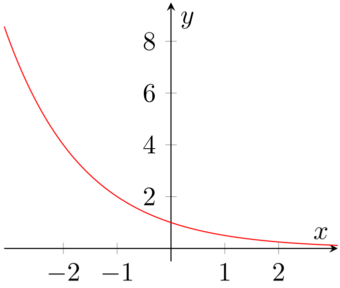
Exponenciális függvény

Ha $x = \frac{p}{q}$ racionális (p, q egész) és a pozitív, akkor $a^x = \sqrt[q]{a^p}$.
Ezt a függvényt „szépen" kiterjeszthetjük az összes valós számra.

$a > 1$ esetén ($a = 2$)



$0 < a < 1$ esetén ($a = \frac{1}{2}$)



Az $x \mapsto a^x$ függvényt exponenciális (hatványkitevő) függvénynek nevezzük.

Az $a = e = 2{,}718281828459\ldots$ esetén „az" exponenciális függvény (jelölés még: $\exp(x)$).

Exponenciális függvények azonosságai

$$\begin{aligned}
a^0 &= 1 \\
a^1 &= a \\
a^{x+y} &= a^x a^y \\
a^{xy} &= (a^x)^y \\
a^{-x} &= \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \\
a^x b^x &= (ab)^x
\end{aligned}$$

Hiperbolikus függvények

koszinusz hiperbolikusz

(hiperbolikus koszinusz)

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

páros, konvex és $\operatorname{ch} x \geq 1$,

jelölés még: $\cosh$

szinusz hiperbolikusz

(hiperbolikus szinusz)

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

páratlan, monoton nő,

jelölés még: $\sinh$

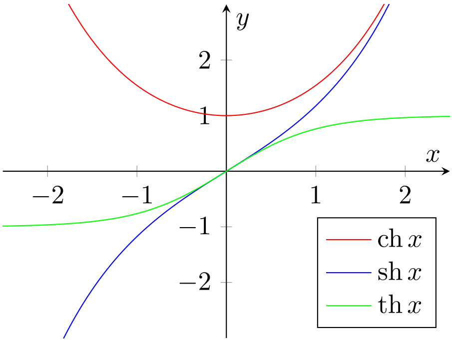
tangens hiperbolikusz

(hiperbolikus tangens)

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

páratlan, monoton nő, értéke -1 és 1 között,

jelölés még: $\tanh$



Összefüggés:

$$\operatorname{sh}^2 x + 1 = \operatorname{ch}^2 x$$

Hiperbolikus függvények tulajdonságainak bizonyítása

A monotonitást és a konvexitás bizonyítására később lesznek eszközeink.

A koszinusz hiperbolikusz többi tulajdonságainak bizonyítása:

A párosságot $-x$ behelyettesítésvel látjuk be:

$$\operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{(-x)} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x)$$

Az alsó korlát bizonyításához a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget használjuk:

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \geq \sqrt{e^{x}e^{-x}} = \sqrt{e^{x-x}} = \sqrt{e^{0}} = \sqrt{1} = 1$$

Házi feladat a másik két függvény paritásának és a tangens hiperbolikusz alsó és felső korlátjának bizonyítása.

Összefüggés bizonyítása:

$$\operatorname{sh}^2 x + 1 = \frac{(e^{x} - e^{-x})^2}{4} + 1 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x} + 4}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{(e^{x} + e^{-x})^2}{4} = \operatorname{ch}^2 x$$

Inverz

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény injektív, ha az értékkészletének minden elemét pontosan egyszer veszi fel (pontosan egy olyan pont van az értelmezési tartományban, ahol ez a függvény értéke), azaz

$$x_1 \neq x_2 \in D_f \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) injektív függvény inverze az a f^{-1}-gyel jelölt függvény, melyre $f^{-1}(y) = x$, ha $f(x) = y$, azaz $f^{-1}(f(x)) = x$.
Az f^{-1} inverz függvény értelmezési tartománya az f függvény értékkészlete.
(Az f^{-1} inverz függvény értékkészlete az f függvény értelmezési tartománya.)

Példák:
$f(x) = |x|$ nem injektív, így nincs inverze
$f(x) = x$ inverze önmaga: $f^{-1}(x) = x$
$f(x) = x^3$ inverze $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$
$f(x) = x^2$ nem injektív, de ha csak a $[0, +\infty)$ intervallumon értelmezzük, akkor injektív, és az inverze: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = a^x$ inverze $f^{-1}(x) = \log_a(x)$
$f(x) = e^x$ inverze $f^{-1}(x) = \ln x = \log_e(x)$

A logaritmus függvény azonosságai

A logaritmus függvények értelmezési tartománya: $(0, +\infty)$.

$$\begin{aligned}
\log_a(1) &= 0 \\
\log_a(a) &= 1 \\
\log_a(xy) &= \log_a(x) + \log_a(y) \\
\log_a\left(\frac{1}{x}\right) &= -\log_a(x) \\
\log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x) - \log_a(y) \\
\log_a(x^y) &= y \cdot \log_a(x) \\
\log_a(x) &= \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}
\end{aligned}$$

Függvények invertálása

Az $f(x) = 3x + 1$ függvény inverze:

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ 3x + 1 &= y \\ 3x &= y - 1 \\ x &= \frac{y-1}{3}, \end{aligned}$$

tehát $f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{3}$, azaz $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$.

Az $g(x) = \sqrt[3]{x^5 - 1}$ függvény inverze:

Függvények invertálása

Az $f(x) = 3x + 1$ függvény inverze:

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ 3x + 1 &= y \\ 3x &= y - 1 \\ x &= \frac{y-1}{3}, \end{aligned}$$

tehát $f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{3}$, azaz $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$.

Az $g(x) = \sqrt[3]{x^5 - 1}$ függvény inverze:

$$\begin{aligned} g(x) &= y \\ \sqrt[3]{x^5 - 1} &= y \\ x^5 - 1 &= y^3 \\ x^5 &= y^3 + 1 \\ x &= \sqrt[5]{y^3 + 1}, \end{aligned}$$

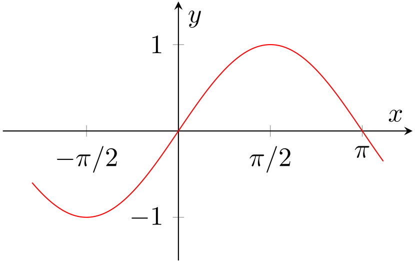
tehát $g^{-1}(y) = \sqrt[5]{y^3 + 1}$, azaz $g^{-1}(x) = \sqrt[5]{x^3 + 1}$.

Szinusz inverze

A $\sin x$ nem injektív:
pl. $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$.
De az

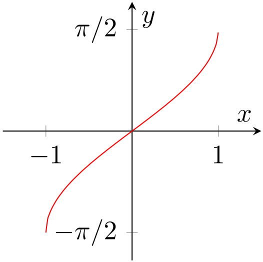
$$f\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$
$$x \mapsto \sin x$$

függvény már injektív, így vehetjük az inverzét.



Inverze:

$$\arcsin x\colon [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

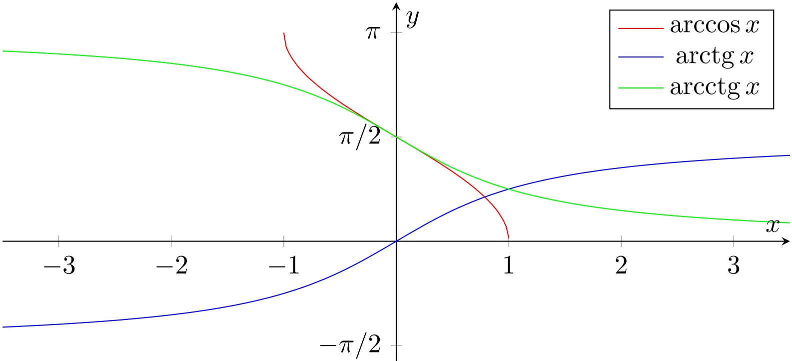


Trigonometrikus függvények inverze

Hasonlóan a $\cos x$ nem injektív, de a $[0, \pi]$-re megszorítva már igen.
Itt az inverze: $\arccos x \colon [-1, 1] \to [0, \pi]$.
Megjegyzés: $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ (mivel $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.).

A $\operatorname{tg} x$ függvényt a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-re kell megszorítani, hogy injektív legyen.
Itt az inverze: $\operatorname{arctg} x \colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

A $\operatorname{ctg} x$ függvényt a $(0, \pi)$-re kell megszorítani, hogy injektív legyen.
Itt az inverze: $\operatorname{arcctg} x \colon \mathbb{R} \to (0, \pi)$. Megjegyzés: $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$.



Hiperbolikus függvények inverze

A $\operatorname{ch} x$ függvényt a $[0, +\infty)$-re kell megszorítani, hogy injektív legyen.
Itt az inverze area koszinusz hiperbolikusz:
$\operatorname{arch} x \colon [1, +\infty) \to [0, +\infty)$

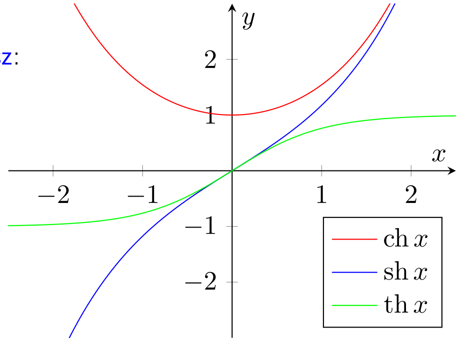
$$\operatorname{arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

A $\operatorname{sh} x$ függvény injektív.
Inverze area szinusz hiperbolikusz:
$\operatorname{arsh} x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

A $\operatorname{th} x$ függvény injektív.
Inverze area tangens hiperbolikusz:
$\operatorname{arth} x \colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$



Hiperbolikus függvények inverze – bizonyítás

Feladat:
Határozzuk meg a koszinusz hiperbolikusz (nemnegatív számokra vett megszorításának) inverzét.

Hiperbolikus függvények inverze – bizonyítás

Feladat:
Határozzuk meg a koszinusz hiperbolikusz (nemnegatív számokra vett megszorításának) inverzét.

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} x &= y \\
\frac{e^x + e^{-x}}{2} &= y \\
e^x + e^{-x} &= 2y \\
e^{2x} + 1 &= 2ye^x \\
(e^x)^2 + 1 - 2ye^x &= 0 \\
t^2 - 2yt + 1 &= 0,
\end{aligned}$$

ahol $t = e^x$. Az utolsó egyenlet t-re egy másodfokú egyenlet, amit a megoldóképlettel megoldhatunk:

$$t = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

Hiperbolikus függvények inverze – folytatás

$$t = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

Mivel $t = e^x$ legalább 1 (nemnegatív számokra vett megszorítással dolgozunk), így a $-$ előjel nem jó, mert:

$$y - \sqrt{y^2 - 1} = \left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right) \frac{y + \sqrt{y^2 - 1}}{y + \sqrt{y^2 - 1}} = \frac{y^2 - (y^2 - 1)}{y + \sqrt{y^2 - 1}} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}} < 1,$$

ha $y > 1$ ($\operatorname{ch} x \geq 1$). Tehát:

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$$
$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

Így az inverz:

$$\operatorname{arch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),$$

ahogy szerepelt a korábbi dián.

Házi feladat a másik két hiperbolikus függvény inverzének kiszámolása.

Függvénykompozíció

Ha $f\colon A \to B$ és $g\colon B \to C$, akkor

$$g \circ f\colon A \to C$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

A g a külső, míg f a belső függvény.

Ha $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ és $g\colon D_g \to \mathbb{R}$ ($D_f, D_g \subseteq \mathbb{R}$), akkor a $g \circ f$ összetett függvény értelmezési tartománya:

$$\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \text{ és } f(x) \in D_g\}.$$

Példa:
$f(x) = \sqrt{x}$ ($D_f = [0, +\infty)$) és $g(x) = 2x + 1$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x} + 1 \qquad x \geq 0$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = \sqrt{2x + 1} \qquad 2x + 1 \geq 0$$