7. előadás

Folytonosság

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2022. szeptember 28.

Pontbeli folytonosság

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha a függvény határértéke és a függvény értéke megegyezik x_0-ban:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ekvivalens definíció:
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Hasonlóan egyoldali folytonosság:
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény jobbról folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$.
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény balról folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$.
Ha egy függvény egy pontjában jobbról és balról is folytonos, akkor folytonos abban a pontban.

Példák:
$f(x) = [x]$ függvény az egész helyeken jobbról folytonos, de balról nem.
$f(x) = \sqrt{x}$ függvény a 0-ban csak jobbról folytonos.

Tételelek

A hasonló határértékes tételekből:

Tétel:
Egy adott x_0 pontban folytonos függvények összege, különbsége, szorzata és hányadosa (feltéve, hogy a nevező nem 0) is folytonos az x_0 pontban.

Tétel:
Ha a g függvény folytonos x_0-ban és f függvény folytonos a $g(x_0)$-ban, akkor $f \circ g$ is folytonos x_0-ban.

Függvények folytonossága

Általában egy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény folytonos, ha minden $x_0 \in D_f$ pontban folytonos.

Az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, ha minden $x_0 \in (a,b)$ pontban folytonos, és a-ban jobbról, b-ben balról folytonos.

Példák:
$x, x^2, |x|, e^x, \sin x, \frac{1}{x}$ folytonosak.
$[x]$ függvény csak az egész pontokon kívül folytonos.
A Diriclet-függvény sehol sem folytonos.

Tétel:
Ha az f függvény szigorúan monoton és folytonos, akkor az f^{-1} inverz létezik és folytonos (és monoton).

Feladat

Határozzuk meg az a paraméter értékét, hogy az alábbi függvény folytonos legyen.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{ha } 0 \le x < 2 \\ a, & \text{ha } x = 2 \\ x^2+1, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

A függvény az $x \neq 2$ pontokban folytonos.
Az $x = 2$ pontban:

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (2x+1) = 5$$
$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (x^2+1) = 5, \text{ így}$$
$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

A függvény pontosan akkor folytonos $x = 2$-ben, ha $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$.
Tehát az kell, hogy $a = f(2) = 5$ legyen.

Még egy feladat

Határozzuk meg az a paraméter értékét, hogy az alábbi függvény folytonos legyen.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } x < 0 \\ 3x + a, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

Még egy feladat

Határozzuk meg az a paraméter értékét, hogy az alábbi függvény folytonos legyen.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } x < 0 \\ 3x + a, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

A függvény az $x \neq 0$ pontokban folytonos, továbbá 0-ban jobbról folytonos. Az $x = 0$ pontban a bal oldali határértéke:

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \cos x = 1$$

Így az kell, hogy $1 = f(0) = a$ legyen.

Szakadási pontok

Ha egy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény egy $x_0 \in D_f$ pontban nem folytonos, akkor az x_0 szakadási pont.

Osztályozásuk:

- megszüntethető szakadás
- ugrás (elsőfajú) szakadás
- szinguláris (másodfajú) szakadás

Megszüntethető szakadás

Az x_0 pontban megszüntethető a szakadás, ha az x_0-beli függvényérték módosításával (esetleg értelmezésével) folytonossá tehető a függvény.

Példák:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{ha } 0 \le x < 2 \\ 3, & \text{ha } x = 2 \\ x^2+1, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

Ha $f(2) = 3$ helyett $f(2) = 5$, akkor folytonos.

$$f(x) = \frac{x-2}{x-2} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq 2 \\ \text{nincs értelmezve}, & \text{ha } x = 2 \end{cases}$$

Ha 2-ben értelmezzük 1-nek a függvényt, akkor folytonos.

$$f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$$

Mivel $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x-2) = -1$, így ha 1-ben -1-nek értelmezzük, akkor folytonos.

Ugrás szakadás

Az x_0 pontban ugrás szakadás van, ha létezik és véges a jobb és bal oldali határérték, de nem egyezik meg:

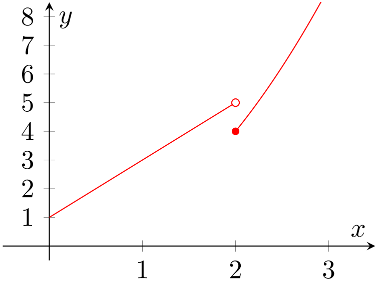
$$\lim_{x \to x_0-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0+} f(x)$$

Példák:
Egészrész függvény egész helyeken.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{ha } 0 \leq x < 2 \\ x^2, & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$$

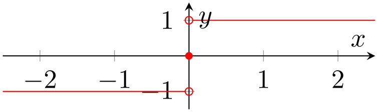
$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (2x+1) = 5$$

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} x^2 = 4$$



A szignum (előjel) függvény 0-ban:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

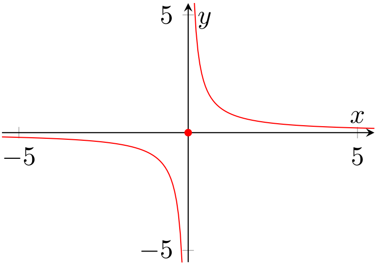


Szinguláris szakadás

A szakadás szinguláris, ha legalább az egyik oldali határérték nem létezik vagy létezik, de végtelen.

Példák:

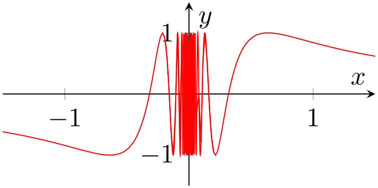
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$



Ekkor $\lim_{x \to 0+} f(x)$ nem létezik.

Korlátos, zárt intervallumon folytonos függvények

Tétel:
Az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény korlátos, azaz létezik $k, K \in \mathbb{R}$, hogy

$$k \leq f(x) \leq K \text{ minden } x \in [a,b]\text{-re.}$$

Lényeges, hogy az értelmezési tartomány zárt intervallum, pl: $f(x) = \frac{1}{x}$ a $(0,1]$ intervallumon nem korlátos.

Weierstrass-tétel:
Az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény felveszi a minimum és maximum értékét, azaz van olyan $\alpha, \beta \in [a,b]$, hogy

$$f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) \text{ minden } x \in [a,b]\text{-re.}$$

A zárt intervallum itt is lényeges, pl: az $f(x) = x$ függvényt csak a $(0,1)$ intervallumon értelmezve nincs megfelelő α, β $(0, 1 \notin (0,1))$.

Korlátos, zárt intervallumon folytonos függvények

Bolzano-tétel:
Az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény az $f(a)$ és $f(b)$ között minden értéket felvesz, azaz ha $f(a) \leq y \leq f(b)$ vagy $f(b) \leq y \leq f(a)$, akkor létezik olyan $x \in [a,b]$, hogy $f(x) = y$.
A folytonosság lényeges, mert pl. az egészrész függvény nem veszi fel az $\frac{1}{2}$ értéket.

Bolzano és Weierstrass tételének következménye:
Korlátos, zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény a minimuma és a maximuma között minden értéket felvesz. Azaz:

Az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényhez van olyan $\alpha, \beta \in [a,b]$, hogy

- minden $x \in [a,b]$-re $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$, és
- $f(\alpha) \leq y \leq f(\beta)$ esetén van olyan $x \in [a,b]$, hogy $f(x) = y$.