11. gyakorlat

Határozatlan és határozott integrálok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2022. december 1.

1. feladat (a)

A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\displaystyle\int xe^{3x}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

1. feladat (a)

A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\int xe^{3x}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

A parciális integrálás képlete szerint:

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Itt $f(x) = x$, $g'(x) = e^{3x}$, amiből $f'(x) = 1$, $g(x) = \dfrac{e^{3x}}{3}$.

$$\int xe^{3x}\,\mathrm{d}x = x\frac{e^{3x}}{3} - \int 1 \cdot \frac{e^{3x}}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C$$

1. feladat (b)

A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\displaystyle\int x^2 \cos(5x)\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

1. feladat (b)

A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\displaystyle\int x^2 \cos(5x)\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

$$\begin{array}{ll} f(x) = x^2 & f'(x) = 2x \\ g'(x) = \cos(5x) & g(x) = \frac{\sin(5x)}{5} \end{array}$$

$$\int x^2 \cos(5x)\,\mathrm{d}x = x^2\frac{\sin(5x)}{5} - \int 2x\frac{\sin(5x)}{5}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2\sin(5x)}{5} - \frac{2}{5}\int x\sin(5x)\,\mathrm{d}x$$

Az utolsó integrál kiszámolásához újabb parciális integrálás:

$$\int x\sin(5x)\mathrm{d}x = x\left(-\frac{\cos(5x)}{5}\right) - \int 1\cdot\left(-\frac{\cos(5x)}{5}\right)\mathrm{d}x = -\frac{x\cos(5x)}{5} + \frac{\sin(5x)}{25} + C$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g'(x) = \sin(5x) & g(x) = -\frac{\cos(5x)}{5} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int x^2\cos(5x)\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2\sin(5x)}{5} - \frac{2}{5}\left(-\frac{x\cos(5x)}{5} + \frac{\sin(5x)}{25}\right) + C = \\ &= \frac{x^2\sin(5x)}{5} + \frac{2x\cos(5x)}{25} - \frac{2\sin(5x)}{125} + C \end{aligned}$$

1. feladat (c)

A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\int \arcsin(3x)\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

1. feladat (c)

A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\int \arcsin(3x)\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

Bár ez nem szorzat, mégis a parciális integrálást alkalmazzuk:

$$f(x) = \arcsin(3x) \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}3 = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

$$g'(x) = 1 \qquad g(x) = x$$

$$\int \arcsin(3x)\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \arcsin(3x)\,\mathrm{d}x = x\arcsin(3x) - \int x\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Az utolsó integrálnál az első helyettesítési szabályt alkalmazzuk:

$$\int x\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{18}\int \left(1-9x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-18x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\frac{\left(1-9x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{1-9x^2}}{3} + C$$

Tehát:

$$\int \arcsin(3x)\,\mathrm{d}x = x\arcsin(3x) - \int x\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\,\mathrm{d}x = x\arcsin(3x) + \frac{\sqrt{1-9x^2}}{3} + C$$

2. feladat (a)

Alkalmas helyettesítéssel számítsuk ki a $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

2. feladat (a)

Alkalmas helyettesítéssel számítsuk ki a $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

$u = \sqrt[3]{x}$ helyettesítéssel
$x = u^3$, így $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 3u^2$, azaz $\mathrm{d}x = 3u^2\,\mathrm{d}u$

$$\int e^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \int e^u 3u^2\,\mathrm{d}u = 3\int u^2 e^u\,\mathrm{d}u$$

Az integrált parciális integrálással számolhatjuk ki: $\begin{array}{ll} f(u) = u^2 & f'(u) = 2u \\ g'(u) = e^u & g(u) = e^u \end{array}$

$$\int u^2 e^u\,\mathrm{d}u = u^2 e^u - \int 2ue^u\,\mathrm{d}u$$

Egy újabb parciális integrálás:

$$\int ue^u\,\mathrm{d}u = ue^u - \int e^u\,\mathrm{d}u = ue^u - e^u + C$$

Tehát:

$$\int e^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = 3\int u^2 e^u\,\mathrm{d}u = 3\left(u^2 e^u - \int 2ue^u\,\mathrm{d}u\right) = 3u^2 e^u - 6(ue^u - e^u) + C =$$

$$= 3u^2 e^u - 6ue^u + 6e^u + C = 3\sqrt[3]{x^2}e^{\sqrt[3]{x}} - 6\sqrt[3]{x}e^{\sqrt[3]{x}} + 6e^{\sqrt[3]{x}} + C$$

2. feladat (b)

Alkalmas helyettesítéssel számítsuk ki a $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, \mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

2. feladat (b)

Alkalmas helyettesítéssel számítsuk ki a $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

$u = e^x$ helyettesítéssel
$x = \ln u$, így $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{u}$, azaz $\mathrm{d}x = \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u + \frac{1}{u}} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \mathrm{arctg} u + C = \mathrm{arctg}(e^x) + C$$

2. feladat (c)

Alkalmas helyettesítéssel számítsuk ki a $\int x\sqrt{5+x}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

2. feladat (c)

Alkalmas helyettesítéssel számítsuk ki a $\displaystyle\int x\sqrt{5+x}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

$u=\sqrt{5+x}$ helyettesítéssel
$x=u^2-5$, így $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=2u$, azaz $\mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u$

$$\int x\sqrt{5+x}\,\mathrm{d}x=\int(u^2-5)u\cdot 2u\,\mathrm{d}u=\int 2u^4-10u^2\,\mathrm{d}u=\frac{2}{5}u^5-\frac{10}{3}u^3+C=$$
$$=\frac{2}{5}\sqrt{5+x}^5-\frac{10}{3}\sqrt{5+x}^3+C=\frac{2}{5}(x+5)^{\frac{5}{2}}-\frac{10}{3}(x+5)^{\frac{3}{2}}+C$$

Helyettesítés nélkül, parciális integrálással is ki lehet hozni:

$f(x)=x \qquad f'(x)=1$
$g'(x)=\sqrt{5+x} \qquad g(x)=\frac{2}{3}(5+x)^{\frac{3}{2}}$

$$\int x\sqrt{5+x}\,\mathrm{d}x=x\cdot\frac{2}{3}(5+x)^{\frac{3}{2}}-\int\frac{2}{3}(5+x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x=$$
$$=\frac{2}{3}x(5+x)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}(5+x)^{\frac{5}{2}}+C=$$
$$=\frac{2}{3}x(5+x)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{15}(5+x)^{\frac{5}{2}}+C$$

Némi átalakítás után látható, hogy a két eredmény azonos.

3. feladat (a)

Számítsuk ki a $\int_0^1 \sqrt{5x+4}\,\mathrm{d}x$ határozott integrált.

3. feladat (a)

Számítsuk ki a $\int_0^1 \sqrt{5x+4}\,\mathrm{d}x$ határozott integrált.

Newton–Leibniz-formula:
Ha az f függvény primitív függvénye az F, akkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

ahol a jobb oldalra az $[F(x)]_a^b$ jelölést is használjuk.

$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

és a lineáris helyettesítést használva kapjuk, hogy

$$\int_0^1 \sqrt{5x+4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}(5x+4)^{3/2}\right]_0^1 = \left[\frac{2(5x+4)^{3/2}}{15}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{2\cdot 9^{3/2}}{15} - \frac{2\cdot 4^{3/2}}{15} = \frac{2\cdot 27 - 2\cdot 8}{15} = \frac{38}{15}.$$

3. feladat (b)

Számítsuk ki a $\int_1^3 x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ határozott integrált.

3. feladat (b)

Számítsuk ki a $\int_1^3 x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ határozott integrált.

Mivel $\left(1+x^3\right)' = 3x^2$, így

$$\int_1^3 x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_1^3 3x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\frac{3}{4}\left(1+x^3\right)^{4/3}\right]_1^3 =$$

$$= \left[\frac{\left(1+x^3\right)^{4/3}}{4}\right]_1^3 = \frac{28^{4/3}-2^{4/3}}{4} \approx 20{,}63.$$

3. feladat (c)

Számítsuk ki a $\displaystyle\int_1^4 \ln(5x-2)\,\mathrm{d}x$ határozott integrált.

3. feladat (c)

Számítsuk ki a $\int_1^4 \ln(5x-2)\,\mathrm{d}x$ határozott integrált.

Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int \frac{1}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = \ln x & f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = 1 & g(x) = x \end{array}$$

melyet a lineáris helyettesítéssel használva kapjuk, hogy

$$\int_1^4 \ln(5x-2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}\big((5x-2)\ln(5x-2) - (5x-2)\big)\right]_1^4 =$$

$$= \frac{1}{5}\,(18\ln(18) - 18) - \frac{1}{5}\,(3\ln(3) - 3) \approx 6{,}75.$$

3. feladat (d)

Számítsuk ki a $\int_3^4 \frac{x}{x^2 - 3x + 2}\,\mathrm{d}x$ határozott integrált.

3. feladat (d)

Számítsuk ki a $\displaystyle\int_3^4 \frac{x}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$ határozott integrált.

Parciális törtekre bontással felhasználva, hogy a nevező gyökei 1 és 2:

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2-3x+2} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}\\ x &= A(x-2)+B(x-1)\\ x &= (A+B)x+(-2A-B)\end{aligned}$$

Ahonnan

$$\begin{aligned}1 &= A+B\\ 0 &= -2A-B\end{aligned}$$

Ezeket összeadva $1=-A$, azaz $A=-1$, és így $B=2$. Így az integrál:

$$\begin{aligned}\int_3^4 \frac{x}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = \int_3^4 \frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x-2}\,\mathrm{d}x &= [-\ln|x-1|+2\ln|x-2|]_3^4 =\\ &= (-\ln 3+2\ln 2)-(-\ln 2+2\ln 1) = 3\ln 2-\ln 3 =\\ &= \ln\left(\frac{8}{3}\right)\approx 0{,}981\end{aligned}$$

Opcionális feladat

Számítsuk ki az $\int e^{-x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

Házi feladatok

1. A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$ határozatlan integrált.
2. Számítsuk ki az $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} \, \mathrm{d}x$ határozott integrált.

Házi feladatok megoldása

1. Most az x^2 lesz a $g'(x)$ függvény:

$$f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = x^2 \quad g(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{1}{x} \frac{x^3}{3} \, \mathrm{d}x = \frac{x^3 \ln x}{3} - \int \frac{x^2}{3} \, \mathrm{d}x = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

2. Mivel $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, így

$$\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} \, \mathrm{d}x = [-\cos(\ln x)]_1^e = -\cos(1) - (-1) = 1 - \cos(1) \approx 0{,}46.$$