

# 12. gyakorlat

## Határozott integrál alkalmazásai

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2022. december 8.

# 1. feladat

Határozzuk meg az  $f(x) = x^2$  és a  $g(x) = \sqrt{x}$  függvények grafikonjai által közrezárt síkidom területét.

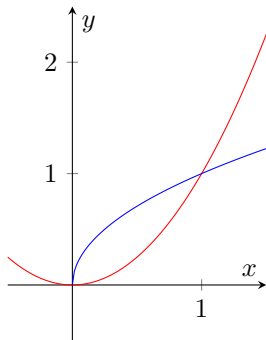
# 1. feladat

Határozzuk meg az  $f(x) = x^2$  és a  $g(x) = \sqrt{x}$  függvények grafikonjai által közrezárt síkidom területét.

A két grafikon metszéspontjainak  $x$  koordinátái az  $x^2 = \sqrt{x}$  egyenlet megoldásai, azaz 0 és 1.

A közrezárt síkidom területe a két görbe alatti terület különbsége:

$$\int_0^1 \sqrt{x} \, dx - \int_0^1 x^2 \, dx = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 \, dx = \left[ \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$



## 2. feladat

Határozzuk meg az  $y = x^4$  és az  $y = 3x^2 - 2$  egyenletű görbék által közrezárt síkidom területét.

## 2. feladat

Határozzuk meg az  $y = x^4$  és az  $y = 3x^2 - 2$  egyenletű görbék által közrezárt síkidom területét.

A metszéspont meghatározása:

$$\begin{aligned}x^4 &= 3x^2 - 2 \\x^4 - 3x^2 + 2 &= 0\end{aligned}$$

Ez  $t = x^2$ -re egy másodfokú egyenlet:

$$t^2 - 3t + 2 = 0,$$

ennek gyökei 1 és 2. Így a metszéspontok  $x$  koordinátái:  $-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}$ .

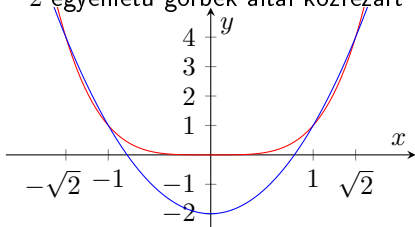
Három integrált kell kiszámolnunk:

$-\sqrt{2}$  és  $-1$  között;  $-1$  és  $1$  között;  $1$  és  $\sqrt{2}$  között.

$$\int_1^{\sqrt{2}} 3x^2 - 2 - x^4 dx = \left[ x^3 - 2x - \frac{x^5}{5} \right]_1^{\sqrt{2}} = -\frac{4\sqrt{2}}{5} - \left( -\frac{6}{5} \right) = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{5}$$

$$\int_{-1}^1 x^4 - (3x^2 - 2) dx = \left[ \frac{x^5}{5} - x^3 + 2x \right]_{-1}^1 = \frac{6}{5} - \left( -\frac{6}{5} \right) = \frac{12}{5}$$

A szimmetria miatt az első és harmadik megegyezik, így a terület  $\frac{24 - 8\sqrt{2}}{5}$ .



### 3. feladat

Számítsuk ki az  $f(x) = x\sqrt{x}$ ,  $0 \leq x \leq 4$  függvény grafikonjának az ívhosszát.

### 3. feladat

Számítsuk ki az  $f(x) = x\sqrt{x}$ ,  $0 \leq x \leq 4$  függvény grafikonjának az ívhosszát.

Az  $f$  függvény grafikonjának ívhossza  $a$  és  $b$  között:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

A feladat esetében  $f(x) = x\sqrt{x} = x^{3/2}$ , így  $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ .

Így az ívhossz (alkalmazva a lineáris helyettesítés szabályát):

$$\begin{aligned} \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2} dx &= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \left[ \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} \right]_0^4 = \\ &= \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1) \approx 9,07 \end{aligned}$$

## 4. feladat

Határozzuk meg az  $f(x) = \sin x, x \in [0, \pi]$  függvény grafikonjának az  $x$  tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.



## 4. feladat

Határozzuk meg az  $f(x) = \sin x, x \in [0, \pi]$  függvény grafikonjának az  $x$  tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.

Az  $f(x)$  függvény ( $x \in [a, b]$ ) grafikonját  $x$  tengely körüli megforgatásával kapott forgásfelület térfogata:

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx,$$

mely a jelen esetben felhasználva a  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$  összefüggést:

$$\pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \pi \left[ \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} \approx 4,93$$

## 5. feladat

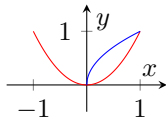
Határozzuk meg a forgási paraboloid alakú váza űrtartalmát és felszínét. A váza alakját az  $f(x) = x^2$  ( $x \in [-1, 1]$ ) függvény grafikonjának  $y$  tengely körüli forgatásával kapjuk.

## 5. feladat

Határozzuk meg a forgási paraboloid alakú váza űrtartalmát és felszínét. A váza alakját az  $f(x) = x^2$  ( $x \in [-1, 1]$ ) függvény grafikonjának  $y$  tengely körüli forgatásával kapjuk.

Áttérve  $x$  tengely körüli forgatásra:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (x \in [0, 1])$$



Az űrtartalom a térfogat:

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^1 x dx = \pi \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$$

És a felszín felhasználva, hogy  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ :

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx = \\ &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx = 2\pi \left[ \frac{2}{3} \left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \\ &= 2\pi \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{5^{\frac{3}{2}}}{8} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} \right) = \frac{(5\sqrt{5} - 1)\pi}{6} \approx 5,33 \end{aligned}$$

# Házi feladatok

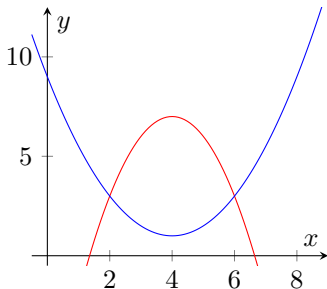
1. Határozzuk meg az  $y = -x^2 + 8x - 9$  és az  $y = \frac{x^2}{2} - 4x + 9$  egyenletű görbék által közrezárt síkidom területét.
2. Számítsuk ki az  $f(x) = \ln(1 - x^2)$ ,  $x \in [0, \frac{1}{2}]$  függvény grafikonjának az ívhosszát.
3. Határozzuk meg az  $f(x) = x - \frac{1}{x}$ ,  $x \in [1, 3]$  függvény grafikonjának az  $x$  tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.

## Első házi feladat megoldása

Határozzuk meg az  $y = -x^2 + 8x - 9$  és az  $y = \frac{x^2}{2} - 4x + 9$  egyenletű görbék által közrezárt síkidom területét.

Először meghatározzuk a metszéspontok  $x$  koordinátáját:

$$\begin{aligned} -x^2 + 8x - 9 &= \frac{x^2}{2} - 4x + 9 \\ 0 &= \frac{3}{2}x^2 - 12x + 18 \\ 0 &= x^2 - 8x + 12 \end{aligned}$$



másodfokú egyenlet megoldásai  $x_1 = 2$  és  $x_2 = 6$ .

E két érték között kell a két függvény különbségét integrálni:

$$\begin{aligned} \int_2^6 (-x^2 + 8x - 9) - \left( \frac{x^2}{2} - 4x + 9 \right) dx &= \int_2^6 -\frac{3}{2}x^2 + 12x - 18 dx = \\ &= \left[ -\frac{3}{2} \frac{x^3}{3} + 6x^2 - 18x \right]_2^6 = 0 - (-16) = 16 \end{aligned}$$

## Második házi feladat megoldása

Számítsuk ki az  $f(x) = \ln(1 - x^2)$ ,  $x \in [0, \frac{1}{2}]$  függvény grafikonjának az ívhosszát.

Az  $f$  függvény grafikonjának ívhossza:  $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ .

A feladat esetében  $f'(x) = \frac{1}{1 - x^2}(-2x) = -\frac{2x}{1 - x^2}$ .

Először csak az integrandus négyzetét számoljuk ki:

$$\begin{aligned} 1 + (f'(x))^2 &= 1 + \left(-\frac{2x}{1 - x^2}\right)^2 = \frac{(1 - x^2)^2}{(1 - x^2)^2} + \frac{4x^2}{(1 - x^2)^2} = \\ &= \frac{1 - 2x^2 + x^4 + 4x^2}{(1 - x^2)^2} = \frac{1 + 2x^2 + x^4}{(1 - x^2)^2} = \frac{(1 + x^2)^2}{(1 - x^2)^2} \end{aligned}$$

Így az ívhossz:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 + x^2}{1 - x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-(1 - x^2) + 2}{1 - x^2} dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} -1 + \frac{2}{1 - x^2} dx = \left[-x + \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| \right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} + \ln 3 - 0 \approx 0,599 \end{aligned}$$

## Harmadik házi feladat megoldása

Határozzuk meg az  $f(x) = x - \frac{1}{x}, x \in [1, 3]$  függvény grafikonjának az  $x$  tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.

Az  $f(x)$  függvény grafikonját  $x$  tengely körüli megforgatásával kapott forgásfelület térfogata:

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx,$$

mely a jelen esetben

$$\begin{aligned} \pi \int_1^3 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx &= \pi \int_1^3 x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} dx = \pi \left[ \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} \right]_1^3 = \\ &= \pi \left( 9 - 6 - \frac{1}{3} - \left( \frac{1}{3} - 2 - 1 \right) \right) = \frac{16}{3} \pi \approx 16,76 \end{aligned}$$