1. gyakorlat

Egyenletek és egyenlőtlenségek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2022. szeptember 8.

1. feladat (a)

Oldjuk meg $\mathbb{R}$-en az $x + 2 = \sqrt{4x + 13}$ egyenletet!

1. feladat (a)

Oldjuk meg $\mathbb{R}$-en az $x + 2 = \sqrt{4x + 13}$ egyenletet!

A gyökvonás miatt $4x + 13 \geq 0$, azaz $x \geq -\frac{13}{4}$.

Az egyenletet négyzetre emelve esetleg újabb gyököket kaphatunk:

$$\begin{aligned}
(x+2)^2 &= 4x + 13 \\
x^2 + 4x + 4 &= 4x + 13 \\
x^2 &= 9 \\
x &= \pm 3
\end{aligned}$$

Visszahelyettesítve ezeket az eredeti egyenletbe azt kapjuk, hogy az $x = 3$ megoldás, az $x = -3$ nem megoldás.

1. feladat (b)

Oldjuk meg $\mathbb{R}$-en az $\left|\dfrac{3x+2}{x-1}\right| = 3$ egyenletet!

1. feladat (b)

Oldjuk meg $\mathbb{R}$-en az $\left|\dfrac{3x+2}{x-1}\right| = 3$ egyenletet!

Kikötjük, hogy $x-1 \neq 0$, azaz $x \neq 1$. Egy szám abszolút értéke pontosan akkor 3, ha a szám -3 vagy $+3$. Tehát két eset van.

Az első:

$$\begin{aligned} \frac{3x+2}{x-1} &= -3 \\ 3x+2 &= -3(x-1) \\ 3x+2 &= -3x+3 \\ 6x &= 1 \\ x &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

A másik eset:

$$\begin{aligned} \frac{3x+2}{x-1} &= 3 \\ 3x+2 &= 3(x-1) \\ 3x+2 &= 3x-3 \\ 2 &= -3, \end{aligned}$$

ami ellentmondás, tehát ebben az esetben nincs megoldás.

Tehát az egyetlen megoldás az $x = \dfrac{1}{6}$ (ami nem 1).

2. feladat (a)

Oldjuk meg $\mathbb{R}$-en az $\left|\dfrac{x}{2}+2\right| \leq 3$ egyenlőtlenséget!

2. feladat (a)

Oldjuk meg $\mathbb{R}$-en az $\left|\frac{x}{2}+2\right| \leq 3$ egyenlőtlenséget!

Egy szám abszolút értéke pontosan akkor legfeljebb 3, ha a szám -3 és 3 között van:

$$-3 \leq \frac{x}{2}+2 \leq 3$$
$$-5 \leq \frac{x}{2} \leq 1$$
$$-10 \leq x \leq 2$$

Tehát $x \in [-10, 2]$ a megoldás.

2. feladat (b)

Oldjuk meg $\mathbb{R}$-en az $|5 - x| > 3$ egyenlőtlenséget!

2. feladat (b)

Oldjuk meg $\mathbb{R}$-en az $|5 - x| > 3$ egyenlőtlenséget!

Egy szám abszolút értéke pontosan akkor nagyobb 3-nál, ha nagyobb 3-nál, vagy kisebb -3-nál.

$$\begin{aligned} 5 - x &> 3 \\ 5 &> 3 + x \\ 2 &> x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 5 - x &< -3 \\ 5 &< -3 + x \\ 8 &< x \end{aligned}$$

Tehát $x \in (-\infty, 2) \cup (8, +\infty)$ a megoldás.

3. feladat

Ábrázoljuk függvénytranszformációkkal az $f(x) = x^2 - 6x + 8$ függvényt!

3. feladat

Ábrázoljuk függvénytranszformációkkal az $f(x) = x^2 - 6x + 8$ függvényt!

Teljes négyzetté alakítünk:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 9 + 8 = (x-3)^2 - 1$$

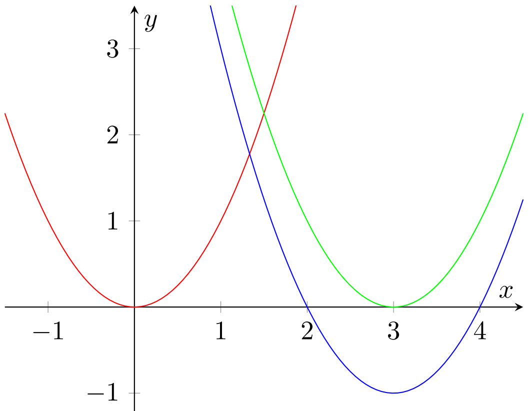
3. feladat

Ábrázoljuk függvénytranszformációkkal az $f(x) = x^2 - 6x + 8$ függvényt!

Teljes négyzetté alakítünk:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 9 + 8 = (x-3)^2 - 1$$

Tehát az $y = x^2$ grafikonját 3 egységgel jobbra, és 1 egységgel lefelé kell mozgatnunk.



4. feladat

Írjunk fel olyan egyenlőtlenség-rendszert, amelynek a megoldáshalmaza az $A(0,0)$, $B(0,5)$ és $C(1,3)$ csúcspontú háromszög belseje.

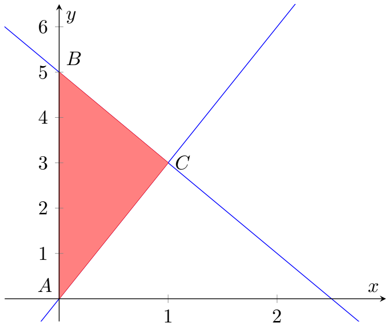
4. feladat

Írjunk fel olyan egyenlőtlenség-rendszert, amelynek a megoldáshalmaza az $A(0,0)$, $B(0,5)$ és $C(1,3)$ csúcspontú háromszög belseje.

AB oldalegyenes egyenlete $x = 0$, ettől jobbra levő pontok: $x > 0$.

AC oldalegyenes meredéksége $\frac{3}{1} = 3$, így az egyenlete $y = 3x + 0$ (átmegy az origón).
A háromszög belseje ezen egyenes felett van, így a megfelelő egyenlőtlenség: $y > 3x$.

A BC oldalegyenes meredeksége $\frac{-2}{1} = -2$, így az egyenlete $y = -2x + 5$, mert az y-tengelyt az 5-nél metszi.
A háromszög belseje ezen egyenes alatt van, így a megfelelő egyenlőtlenség: $y < -2x + 5$.



A háromszög belsejét meghatározó egyenlőtlenség-rendszer:

$$x > 0$$
$$y > 3x$$
$$y < -2x + 5$$

5. feladat

Legyen

$$A = \{1, 2, 10\},$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\},$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy $A \subset C$, $A \neq C$, $B \subset C$, $B \neq C$, $A \not\subset B$ és $B \not\subset A$.

5. feladat

Legyen

$$A = \{1, 2, 10\},$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\},$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy $A \subset C$, $A \neq C$, $B \subset C$, $B \neq C$, $A \not\subset B$ és $B \not\subset A$.

$A \subset C$ azt jelenti, hogy A minden eleme benne van a C halmazban. Mivel $1^2, 2^2, 10^2$ mind legalább 1, így ez teljesül.

$A \neq C$-hez elegendő egy olyan elemet mutatni, mely az egyikben benne van, de a másikban nincs. Ilyen például a 3, mely a C-ben benne van, de az A-ban nem.

$B \subset C$-hez azt kell meggondolni, hogy ha $x > 1$, akkor $x^2 \geq 1$ is teljesül, ami nyilvánvaló.

$B \neq C$ igaz, mert $(-1) \in C$, de $(-1) \notin B$.

$A \not\subset B$, hiszen $1 \in A$, de $1 \notin B$.

$B \not\subset A$, mert $3 \in B$, de $3 \notin A$.

Opcionális feladat

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = ?$$