

8. gyakorlat

Konvexitás, aszimptoták és L'Hospital-szabály

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2022. november 3.

1. feladat (a)

Adjuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken az $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x$ függvény konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

1. feladat (a)

Adjuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken az $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x$ függvény konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

Ha a függvény második deriváltja pozitív, akkor a függvény konvex, ha negatív, akkor konkáv. Ahol a második derivált előjelet vált (és így 0), ott van inflexiós pont.

1. feladat (a)

Adjuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken az $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x$ függvény konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

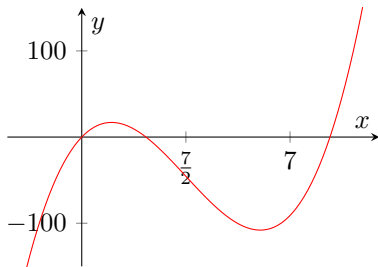
Ha a függvény második deriváltja pozitív, akkor a függvény konvex, ha negatív, akkor konkáv. Ahol a második derivált előjelet vált (és így 0), ott van inflexiós pont.

A függvény deriváltjai:

$$f'(x) = 6x^2 - 42x + 36$$

$$f''(x) = 12x - 42$$

A második derivált $x = \frac{42}{12} = \frac{7}{2}$ esetén 0, ennél kisebb x -ekre negatív, nagyobbakra pozitív. Így a függvény a $(-\infty, \frac{7}{2})$ intervallumban konkáv, a $(\frac{7}{2}, +\infty)$ intervallumban konvex, és az $x = \frac{7}{2}$ inflexiós pont.



1. feladat (b)

Adjuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken az $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$ függvény konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

1. feladat (b)

Adjuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken az $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$ függvény konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

Először kiszámítjuk a deriváltakat:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1) - x^3 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{3x^3 - 3x^2 - x^3}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(6x^2 - 6x)(x-1)^2 - (2x^3 - 3x^2) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(6x^2 - 6x)(x-1) - (2x^3 - 3x^2) \cdot 2}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{6x^3 - 6x^2 - 6x^2 + 6x - 4x^3 + 6x^2}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x}{(x-1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3x + 3)}{(x-1)^3}$$

1. feladat (b) – folytatás

Adjuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken az $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$ függvény konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3x + 3)}{(x-1)^3}$$

Az $x^2 - 3x + 3 = 0$ egyenletnek nincs valós megoldása (mivel a diszkrimináns negatív), így ez a másodfokú polinom mindenütt pozitív (főegyüttható pozitív). Ez alapján:

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x$
f''	+	0	-	n. é.	+
f	konvex	i. p.	konkáv	n. é.	konvex

Tehát a függvény

a $(-\infty, 0)$ intervallumban konvex,

a $(0, 1)$ intervallumban konkáv,

az $(1, +\infty)$ intervallumban megint konvex.

Az $x = 0$ az egyetlen inflexiós pont.

2. feladat

Van-e a függvénynek aszimptotája $(+\infty)$ -ben, illetve $(-\infty)$ -ben? Ha igen, akkor határozzuk meg.

Ha a függvénynek a végtelenben véges a határértéke, akkor vízszintes aszimptotája van, míg ha a határérték végtelen, akkor ferde aszimptotája lehet (de nem biztos, hogy van). A ferde aszimptota $y = ax + b$ egyenletében szereplő a és b értékét a következő határértékek segítségével számolhatjuk ki:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax).$$

2. feladat (a)

Van-e az $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x}$ függvénynek aszimptotája $(+\infty)$ -ben, illetve $(-\infty)$ -ben? Ha igen, akkor határozzuk meg.

2. feladat (a)

Van-e az $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x}$ függvénynek aszimptotája $(+\infty)$ -ben, illetve $(-\infty)$ -ben? Ha igen, akkor határozzuk meg.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 9}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x + \frac{9}{x} = +\infty$$

Ezért ferde aszimptotát keresünk:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 9}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 9}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{9}{x^2} = 1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 9}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 9 - x^2}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{x} = 0 \end{aligned}$$

Így a $(+\infty)$ -ben a ferde aszimptota egyenlete: $y = 1x + 0$, azaz $y = x$. Hasonló számolással kapjuk, hogy ugyanez az aszimptota egyenlete a $(-\infty)$ -ben.

2. feladat (b)

Van-e az $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ függvénynek aszimptotája $(+\infty)$ -ben, illetve $(-\infty)$ -ben? Ha igen, akkor határozzuk meg.

2. feladat (b)

Van-e az $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ függvénynek aszimptotája $(+\infty)$ -ben, illetve $(-\infty)$ -ben? Ha igen, akkor határozzuk meg.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - x^2 - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) = +\infty$$

Most is lehetne ferde aszimptota, de

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - x - 2 = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) = +\infty \end{aligned}$$

miatt nincs ferde aszimptota a $(+\infty)$ -ben.

Hasonló számolással kapjuk, hogy a $(-\infty)$ -ben sincsen.

2. feladat (c)

Van-e az $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$ függvénynek aszimptotája $(+\infty)$ -ben, illetve $(-\infty)$ -ben? Ha igen, akkor határozzuk meg.

2. feladat (c)

Van-e az $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$ függvénynek aszimptotája $(+\infty)$ -ben, illetve $(-\infty)$ -ben? Ha igen, akkor határozzuk meg.

A függvény határértéke:

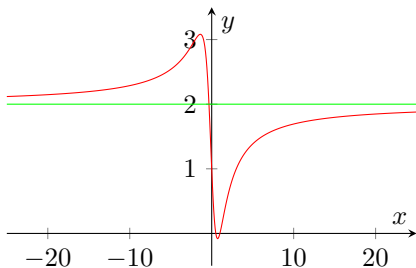
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 2,$$

így ebben az esetben vízszintes aszimptota van, az $y = 2$ egyenes.

Hasonló számolással kapjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2,$$

így a $(-\infty)$ -ben is az $y = 2$ egyenes az aszimptota.



2. feladat (d)

Van-e az $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x + 1}$ függvénynek aszimptotája $(+\infty)$ -ben, illetve $(-\infty)$ -ben? Ha igen, akkor határozzuk meg.

2. feladat (d)

Van-e az $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x + 1}$ függvénynek aszimptotája $(+\infty)$ -ben, illetve $(-\infty)$ -ben? Ha igen, akkor határozzuk meg.

Mivel $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, így itt is ferde aszimptotát keresünk:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2x \right) \frac{\sqrt{4x^2 + 3x + 1} + 2x}{\sqrt{4x^2 + 3x + 1} + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 1 - (2x)^2}{\sqrt{4x^2 + 3x + 1} + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{\sqrt{4x^2 + 3x + 1} + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2} = \frac{3}{\sqrt{4} + 2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Tehát a ferde aszimptota egyenlete: $y = 2x + \frac{3}{4}$ a $(+\infty)$ -ben.

2. feladat (d) – folytatás

A $(-\infty)$ -ben hasonlóan számolhatunk, ám vigyázni kell ekkor, hogy az x negatív, ezért a számolásban bizonyos előjelek megfordulnak:

$$\begin{aligned}a &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4x^2 + 3x + 1}}{-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = -\sqrt{4} = -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 3x + 1} + 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 3x + 1} + 2x \right) \frac{\sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2x}{\sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 3x + 1 - (2x)^2}{\sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 1}{\sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2} = \frac{3}{-\sqrt{4} - 2} = -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

Tehát a ferde aszimptota egyenlete: $y = -2x - \frac{3}{4}$ a $(-\infty)$ -ben.

3. feladat (a)

A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(2x - 4)}{\operatorname{tg}(x - 2)}$

határértékeket.

Azt is állapítsuk meg, hogy milyen típusú „kritikus” határértékről van szó.

3. feladat (a)

A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(2x - 4)}{\operatorname{tg}(x - 2)}$ határértékeket.

Azt is állapítsuk meg, hogy milyen típusú „kritikus” határértékről van szó.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sin(2x - 4) = \sin(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{tg}(x - 2) = \operatorname{tg}(0) = 0$$

Ez egy $\frac{0}{0}$ típusú határérték, így alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sin(2x - 4))'}{(\operatorname{tg}(x - 2))'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\cos(2x - 4)) \cdot 2}{\frac{1}{\cos^2(x-2)} \cdot 1} = \frac{1 \cdot 2}{\frac{1}{1^2} \cdot 1} = 2$$

Ez azt jelenti, hogy $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(2x - 4)}{\operatorname{tg}(x - 2)} = 2$.

3. feladat (b)

A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{3x}$ határértékeket.

Azt is állapítsuk meg, hogy milyen típusú „kritikus” határértékről van szó.

3. feladat (b)

A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{3x}$ határértékeket.

Azt is állapítsuk meg, hogy milyen típusú „kritikus” határértékről van szó.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 3x = +\infty$$

Ez egy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határérték, ebben az esetben is alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x))'}{(3x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3x} = 0,$$

$$\text{így } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{3x} = 0.$$

3. feladat (c)

A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ határértékeket.

Azt is állapítsuk meg, hogy milyen típusú „kritikus” határértékről van szó.

3. feladat (c)

A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ határértékeket.

Azt is állapítsuk meg, hogy milyen típusú „kritikus” határértékről van szó.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x - x) = 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x) = 0 - 0 = 0$$

Így ez $\frac{0}{0}$ típusú határérték, tehát L'Hospital-hatunk:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{tg} x - x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x}$$

Azonban ez is $\frac{0}{0}$ alakú, így ismét alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)'}{(1 - \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(\cos x)^{-3}(-\sin x)}{-(-\sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} 2(\cos x)^{-3} = 2.$$

Tehát $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = 2.$

3. feladat (d)

A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ határértékeket.

Azt is állapítsuk meg, hogy milyen típusú „kritikus” határértékről van szó.

3. feladat (d)

A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ határértékeket.

Azt is állapítsuk meg, hogy milyen típusú „kritikus” határértékről van szó.

Mivel itt nem egy tört határértékét kell kiszámolnunk, ezért előbb közös nevezőre hozással törtté alakítjuk a kifejezést:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}$$

3. feladat (d)

A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ határértékeket.

Azt is állapítsuk meg, hogy milyen típusú „kritikus” határértékről van szó.

Mivel itt nem egy tört határértékét kell kiszámolnunk, ezért előbb közös nevezőre hozással törtté alakítjuk a kifejezést:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}$$

Mivel ekkor a számláló és a nevező is 0-hoz tart, így alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{x(e^x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{1 \cdot (e^x - 1) + xe^x}$$

Ez is $\frac{0}{0}$ alakú, így ismét alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(e^x - 1 + xe^x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{1 + 1 + 0} = \frac{1}{2}$$

Tehát $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \frac{1}{2}$.

Házi feladatok

1. Hol konvex, illetve konkáv az $f(x) = xe^{-5x}$ függvény?
2. Írjuk fel az $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ függvény aszimptotáit.
3. Határozzuk meg az $f(x) = xe^{-5x}$ függvény végtelenbeli határértékeit.

Házi feladatok megoldása

1. A $(-\infty, \frac{2}{5})$ intervallumon konkáv, $(\frac{2}{5}, +\infty)$ intervallumon konvex.
2. Ferde aszimptoták: $-\infty$ -ben $y = -x$, $+\infty$ -ben $y = x$.
3. A $-\infty$ -ben $-\infty$, míg $+\infty$ -ben 0.