9. gyakorlat

Teljes függvényvizsgálat

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2022. november 10.

Függvényvizsgálat

Adott egy $f(x)$ függvény, megállapítjuk:

- értelmezési tartomány (ÉT)
- zérushely
- paritás
- periodicitás
- értelmezési tartomány szélein határértékek
  - aszimptoták
- első derivált
  - monotonitási tulajdonságok
  - lokális szélsőértékek
- második derivált
  - konvexitás
  - inflexiós pontok
- sematikus ábrázolás
- értékkészlet (ÉK)

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$$

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$

ÉT: $\mathbb{R}$

zérushely: ezt ennél a függvénynél kivételesen nem vizsgáljuk

periódus: nincs (polinom, és így a végtelenben végtelenbe tart, ami nem lehet egy periodikus függvénynél)

paritás: nincs $f(1) = -11$ és $f(-1) = -3$: nem egyenlőek, ellentettek

határértékek:

$$\lim_{x\to\infty} 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2 = \lim_{x\to\infty} x^4 \left(3 - \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{2}{x^4}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2 = \lim_{x\to-\infty} x^4 \left(3 - \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{2}{x^4}\right) = +\infty$$

Ferde aszimptota lehetne, de

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2}{x} = \lim_{x\to\infty} 3x^3 - 4x^2 - 12x + \frac{2}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^3 \left(3 - \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{2}{x^4}\right) = +\infty$$

mutatja, hogy nincsen. Hasonlóan a $-\infty$-ben sincs.

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$

$$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 - 4 \cdot 3x^2 - 12 \cdot 2x = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2)$$
$$f''(x) = 12 \cdot 3x^2 - 12 \cdot 2x - 24 = 36x^2 - 24x - 24$$

első derivált nullhelyei: $0, 2, -1$

második derivált nullhelyei: $\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$,

legyen $a = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3} \approx -0{,}55$ és $b = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3} \approx 1{,}22$

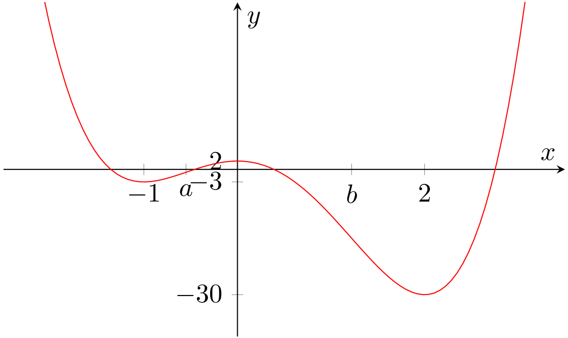
<table>
<tr><th></th><th>$(-\infty, -1)$</th><th>-1</th><th>$(-1, a)$</th><th>a</th><th>$(a, 0)$</th><th>0</th><th>$(0, b)$</th><th>b</th><th>$(b, 2)$</th><th>2</th><th>$(2, +\infty)$</th></tr>
<tr><td>f'</td><td>$-$
mon. csök.</td><td>0
min.</td><td colspan="3">$+$
mon. nő</td><td>0
max.</td><td colspan="3">$-$
mon. csök.</td><td>0
min.</td><td>$+$
mon. nő</td></tr>
<tr><td>f''</td><td colspan="3">$+$
konvex</td><td>0
i. p.</td><td colspan="3">$-$
konkáv</td><td>0
i. p.</td><td colspan="3">$+$
konvex</td></tr>
</table>

lokális minimumok: $f(-1) = -3$ és $f(2) = -30$

lokális maximum: $f(0) = 2$

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$

<table>
<tr><th></th><th>$(-\infty, -1)$</th><th>-1</th><th>$(-1, a)$</th><th>a</th><th>$(a, 0)$</th><th>0</th><th>$(0, b)$</th><th>b</th><th>$(b, 2)$</th><th>2</th><th>$(2, +\infty)$</th></tr>
<tr><td>f'</td><td>$-$
mon. csök.</td><td>0
min.</td><td colspan="3">$+$
mon. nő</td><td>0
max.</td><td colspan="3">$-$
mon. csök.</td><td>0
min.</td><td>$+$
mon. nő</td></tr>
<tr><td>f''</td><td colspan="3">$+$
konvex</td><td>0
i. p.</td><td colspan="3">$-$
konkáv</td><td>0
i. p.</td><td colspan="3">$+$
konvex</td></tr>
</table>



ÉK: $[-30, +\infty)$

$$f(x) = \frac{x^2-3}{2-x}$$

$f(x) = \frac{x^2-3}{2-x}$

ÉT: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

zérushely: $x^2 - 3 = 0$, azaz $x = \pm\sqrt{3}$

periódus: nincs (pl. a zérushelyek miatt)

paritás: nincs (pl. az értelmezési tartomány miatt)

határértékek:

$$\lim_{x \to 2+} \frac{x^2-3}{2-x} = \lim_{x \to 2+} \frac{1}{2-x} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 2-} \frac{x^2-3}{2-x} = \lim_{x \to 2-} \frac{1}{2-x} = +\infty$$

Az $x = 2$-ben függőleges aszimptota van.

$f(x) = \frac{x^2-3}{2-x}$

határértékek a végtelenben:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3}{2-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\frac{3}{x}}{\frac{2}{x}-1} = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3}{2-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-\frac{3}{x}}{\frac{2}{x}-1} = +\infty$$

Nézzük meg, hogy a végtelenben van-e ferde aszimptota:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-3}{2-x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{2x-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{3}{x^2}}{\frac{2}{x}-1} = -1$$
$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{2-x} + x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3+2x-x^2}{2-x} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{3}{x}}{\frac{2}{x}-1} = -2$$

Tehát az aszimptota egyenlete a $+\infty$-ben $y = -x-2$.

Hasonló számolással kapjuk, hogy a $-\infty$-ben is ez az aszimptota.

$f(x) = \frac{x^2-3}{2-x}$

$$f'(x) = \frac{2x(2-x) - (x^2-3)\cdot(-1)}{(2-x)^2} = \frac{-x^2+4x-3}{(2-x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-2x+4)\cdot(2-x)^2 - (-x^2+4x-3)\cdot 2(2-x)\cdot(-1)}{(2-x)^4} =$$

$$= \frac{(-2x+4)\cdot(2-x) + 2(-x^2+4x-3)}{(2-x)^3} = \frac{2}{(2-x)^3}$$

Az első derivált nullhelyei $1, 3$, míg a másodiknak nincs.

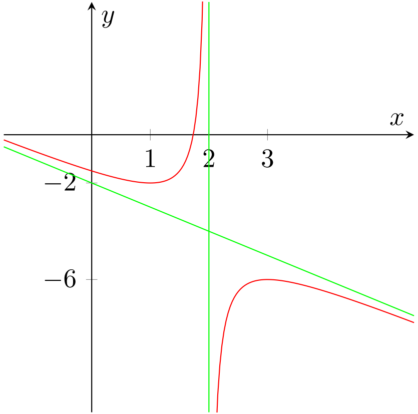
	$x<1$	1	$1<x<2$	2	$2<x<3$	3	$3<x$
f'	$-$	0	$+$	n. é.	$+$	0	$-$
	mon. csök.	min.	mon. nő	n. é.	mon. nő	max.	mon. csök.
f''	$+$			n. é.	$-$		
	konvex			n. é.	konkáv		

lokális minimum: $f(1) = -2$
lokális maximum: $f(3) = -6$

$f(x) = \frac{x^2-3}{2-x}$

	$x<1$	1	$1<x<2$	2	$2<x<3$	3	$3<x$	
f'	$-$	0	$+$	n. é.	$+$	0	$-$	
	mon. csök.	min.	mon. nő	n. é.	mon. nő	max.	mon. csök.	lokális
f''	$+$			n. é.	$-$			
	konvex			n. é.	konkáv			

minimum: $f(1) = -2$, lokális maximum: $f(3) = -6$



ÉK: $(-\infty, -6] \cup [-2, +\infty)$

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

ÉT: $\mathbb{R}$ $(1 + e^x > 0)$.

zérushely: nincs $(e^x \neq 0)$

periódus: nincs (pl. látni fogjuk, hogy monoton nő)

paritás: nincs $(f(1) \approx 0{,}73, f(-1) \approx 0{,}27)$

határértékek:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^x}+1} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{0}{1+0} = 0, \text{ mert } \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Tehát a függvénynek vízszintes aszimptotái vannak:
a $+\infty$-ben az $y = 1$ egyenes
a $-\infty$-ben az $y = 0$ egyenes

$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

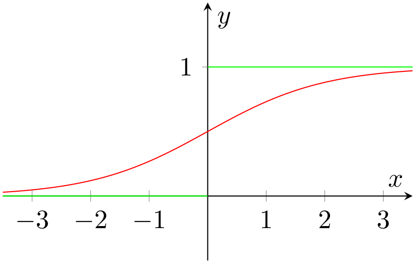
$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - e^x \cdot 2(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot 2e^x}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$$

az első derivált mindenütt pozitív
a második $e^x = 1$, azaz $x = 0$ esetén 0

	$x < 0$	0	$0 < x$
f'		$+$ monoton nő	
f''	$+$ konvex	0 i. p.	$-$ konkáv

ÉK: $(0, 1)$



$f(x) = \frac{x}{x+1}$

ÉT: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

zérushely: $x = 0$.

paritás: nincs (pl. ÉT miatt)

periodicitás nincs (pl. ÉT miatt)

határérétékek:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

Így $y = 1$ vízszintes aszimptota a $\pm\infty$-ben.

$$\lim_{x \to -1-} \frac{x}{x+1} = +\infty$$
$$\lim_{x \to -1+} \frac{x}{x+1} = -\infty$$

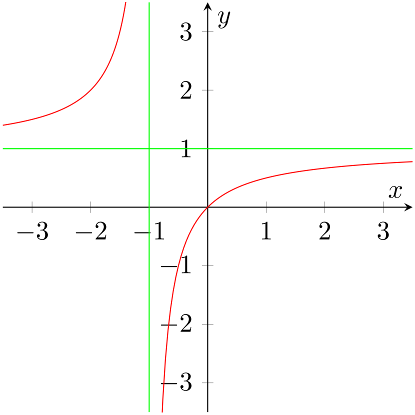
Így $x = -1$ függőleges aszimptota.

$f(x) = \frac{x}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{(x+1)^3}$$

	$x < -1$	-1	$-1 < x$
f'	$+$	n.é.	$+$
f	nő	n.é.	nő
f''	$+$	n.é.	$-$
f	konvex	n.é.	konkáv



ÉK: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$f(x) = \ln\left(x^2 - 1\right)$

ÉT: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

zérushely: $\pm\sqrt{2}$.

paritás: páros:

$$f(-x) = \ln\left((-x)^2 - 1\right) = \ln\left(x^2 - 1\right) = f(x)$$

Így elegendő csak $1 < x$ esett vizsgálni.

periodicitás: nincs (pl. zérushely miatt)

határérték:

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(x^2 - 1\right) = +\infty$$

Ferde aszimptota (L'Hospital-szabály alkalmazásával):

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(x^2 - 1\right)}{x} \rightsquigarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x - \frac{1}{x}} = 0, \\ b &= \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \end{aligned}$$

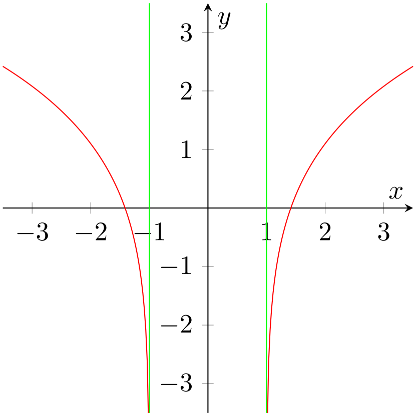
így nincsen. A párosság miatt ugyanez a helyzet a $(-\infty)$-ben is.

$f(x) = \ln\left(x^2 - 1\right)$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot \left(x^2 - 1\right) - 2x \cdot 2x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{-2x^2 - 2}{\left(x^2 - 1\right)^2}$$

	$x < -1$	$-1 \leq x \leq 1$	$1 < x$
f'	$-$	n.é.	$+$
f	csökken	n.é.	nő
f''	$-$	n.é.	$-$
f	konkáv	n.é.	konkáv



ÉK: $\mathbb{R}$