4. vizsga végeredményei

4. alulról korlátos

5. (d)

6. Invertálható, inverze $f^{-1}(x) = 3\operatorname{arccos}\left(\frac{x-\pi}{5}\right)$, mivel megfelelő az értelmezési tartomány.

7. A függvény: $f(x) = 20 + x + 150 - 14\sqrt{x} = 170 + x - 14\sqrt{x}$, melynek deriváltja: $f'(x) = 1 - \dfrac{14}{2\sqrt{x}} = 1 - \dfrac{7}{\sqrt{x}}$, mely $x = 49$-ben tűnik el.
   Ez lokális minimum, hiszen a második derivált: $f''(x) = \dfrac{7}{2\sqrt{x^3}}$ pozitív.
   A függvénynek $0 \le x \le 100$ esetén van értelme, a széleken a függvény: $f(0) = 170$ és $f(100) = 130$, míg $f(49) = 121$, tehát a lokális minimum globális.

8. ÉT: $\mathbb{R}$, zérushely nincs, paritás, periódus nincsen.
   $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, így $y = 0$ vízszintes aszimptota.
   $f'(x) = e^{4x-2x^2}(4-4x)$, nullhelye $x = 1$.
   $f''(x) = e^{4x-2x^2}(12 - 32x + 16x^2)$, nullhelyei: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$.

<table>
<tr><td></td><td>$(-\infty, \frac{1}{2})$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$(\frac{1}{2}, 1)$</td><td>1</td><td>$(1, \frac{3}{2})$</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td>$(\frac{3}{2}, +\infty)$</td></tr>
<tr><td>f'</td><td colspan="3">$+$</td><td>0</td><td colspan="3">$-$</td></tr>
<tr><td>f</td><td colspan="3">nő</td><td>max</td><td colspan="3">csökken</td></tr>
<tr><td>f''</td><td>$+$</td><td>0</td><td colspan="3">$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>f</td><td>konvex</td><td>i.p.</td><td colspan="3">konkáv</td><td>i.p.</td><td>konvex</td></tr>
</table>

   ÉK: $\left(0, e^2\right]$

9. Mivel $x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = (x+3)(x^2-2) + 7$, így
$$\int \frac{x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{x+3}\,\mathrm{d}x = \int x^2 - 2 + \frac{7}{x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - 2x + 7\ln|x+3| + C$$

10. Mivel $(3\ln x)' = \frac{3}{x}$, így
$$\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(3\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{e^\pi} \frac{1}{3}\sin(3\ln x)\frac{3}{x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}\cos(3\ln x)\right]_1^{e^\pi} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

11. A metszéspontok: $3 - x^2 = 1 - x$ egyenletből: $x_1 = -1$ és $x_2 = 2$, így a kérdéses terület:
$$\int_{-1}^{2} 3 - x^2 - (1-x)\ \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} 2 - x^2 + x\ \mathrm{d}x = \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{9}{2} = 4{,}5$$