5. vizsga végeredményei

4. konkáv

5. (c)

6. Ha $x \neq 2$, akkor folytonos a függvény. Itt a határérték:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}\,\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} =$$
$$= \lim_{x\to 2} \sqrt{x+2}+2 = 4,$$

ami nem egyezik a függvény értékével (1), így ez megszüntethető szakadás.

7. A függvény: $f(x) = 12\sqrt{x} + 2(18-x) = 36 + 12\sqrt{x} - 2x$, melynek deriváltja: $f'(x) = \dfrac{12}{2\sqrt{x}} - 2 = \dfrac{6}{\sqrt{x}} - 2$, mely $x = 9$-ben tűnik el.

Ez lokális maximum, hiszen a második derivált: $f''(x) = -\dfrac{6}{2\sqrt{x^3}}$ negatív.

A függvénynek $0 \le x \le 18$ esetén van értelme, a széleken a függvény: $f(0) = 36$ és $f(18) = 36\sqrt{2} \approx 50{,}9$, míg $f(9) = 54$, tehát a globális a maximum.

8. ÉT: $\mathbb{R}$, zérushely 0 és -1, paritás, periódus nincsen.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, ferde aszimptota nincs.

$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x$, nullhelyei 0, -1, $-\frac{1}{2}$.

$f''(x) = 12x^2 + 12x + 2$, nullhelyei: $a = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$ és $b = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$.

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,a)$	a	$(a,-\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2},b)$	b	$(b,0)$	0	$(0,+\infty)$
f'	$-$	0		$+$		0		$-$		0	$+$
f	csökken	min		nő		max		csökken		min	nő
f''		$+$		0		$-$		0		$+$	
f		konvex		i.p.		konkáv		i.p.		konvex	

ÉK: $[0,+\infty)$

9. $f'(x) = \frac{e^{3x}}{3} + 3x + C_1$, ahol $C_1 = \frac{8}{3}$, így $f'(x) = \frac{e^{3x}}{3} + 3x + \frac{8}{3}$.

$f''(x) = \frac{e^{3x}}{9} + \frac{3x^2}{2} + \frac{8}{3}x + C_2$, ahol $C_2 = \frac{8}{9}$, így $f''(x) = \frac{e^{3x}}{9} + \frac{3x^2}{2} + \frac{8}{3}x + \frac{8}{9}$.

10. $$\int \operatorname{arctg}(3x)\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arctg}(3x) - \int x\frac{3}{1+(3x)^2}\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arctg}(3x) - \frac{\ln(1+9x^2)}{6} + C$$

11. $$\pi\int_0^\pi \left(x\sqrt{\sin x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^\pi x^2\sin x\,\mathrm{d}x = \pi\left[-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x\right]_0^\pi = \pi(\pi^2-4),$$

mert

$$\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,\mathrm{d}x = -x^2\cos x + 2x\sin x - \int 2\sin x\,\mathrm{d}x =$$
$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$$