10. előadás

Mátrixok determinánsa

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2022. március 22.

Bevezetés

Csak négyzetes mátrixoknak van determinánsa.

$$1 \times 1 \quad \mathbf{A} = [a] \qquad \det \mathbf{A} = a$$

$$2 \times 2 \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \det \mathbf{A} = ad - bc$$

$$3 \times 3 \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \qquad \det \mathbf{A} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Sarrus-szabály

Nagyobb méret esetén nincs ilyen egyszerű szabály.

Példák:

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 1 \cdot 4 = 11$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & \\ 1 & 3 \end{matrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 2 + 0 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 2 =$$

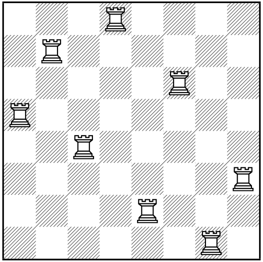
$$= -4 + 0 + 3 + 2 - 3 - 0 = -2$$

Determináns általában

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{\pi} (-1)^{\sigma(\pi)} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}$$

ahol π egy permutáció és σ az inverziók száma.

Bástyaelhelyezés: minden sorból és oszlopból pontosan egy elemet választunk



Aldetermináns

Aldetermináns: Egy mátrixnak kiválasztjuk k sorát és k oszlopát, az ezekben álló elemek által meghatározott mátrix determinánsa.

Példa:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 7$$

Ha $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es mátrix, akkor A_{ij} jelöli az i-edik sor és a j-edik oszlop elhagyásával kapott $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsát (aldetermináns).

Példa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -15$$

Kifejtési tétel

Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ mátrix determinánsának meghatározásához:

k-adik sor szerinti kifejtés:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} A_{kj}$$

k-adik oszlop szerinti kifejtés:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} A_{ik}$$

Az előjel a sakktábla-szabály szerint:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Példa a kifejtésre

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

első sor szerinti kifejtés:

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (1 - 15) - 3 \cdot (2 - 20) + 4 \cdot (6 - 4) =$$

$$= -14 - 3 \cdot (-18) + 8 = 48$$

második oszlop szerinti kifejtés:

$$\det \mathbf{A} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot (2 - 20) + 1 \cdot (1 - 16) - 3 \cdot (5 - 8) =$$

$$= -3 \cdot (-18) - 15 + 9 = 48$$

A determináns kiszámítása

A determináns és a sortranszformációk:

- A determináns nem változik, ha a mátix egy sorához egy másik sorának valahányszorosát hozzáadjuk.
- A determináns az ellentettjére változik, ha a mátrix két sorát megcseréljük.
- A determináns λ-val szorzódik, ha a mátrix egy sorát λ-val megszorozzuk.

Ugyanezek igazak oszloptranszformációkra is.

Egy négyzetes mátrixot felső háromszögmátrixnak nevezünk, ha a főátlója alatt minden elem 0.

A felső háromszögmátrixok determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

Példák:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 5 = 10$$

$$\det \mathbf{E}_n = 1$$

Egy példa

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{s_1 \leftrightarrow s_3}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{s_3-4s_1 \\ s_4-3s_1}}{\overset{s_2-2s_1}{=}} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{s_2/2}{=}$$

$$= (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{s_4+3s_2}{\overset{s_3+6s_2}{=}} (-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} \overset{s_3 \leftrightarrow s_4}{=}$$

$$= (-2) \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 14 \end{vmatrix} \overset{s_4-3s_3}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-10) = -20$$

Feladat

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ mátrix determinánsa}$$

Feladat

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ mátrix determinánsa}$$

Kifejtés a harmadik oszlop szerint:

$$\det \mathbf{A} = 0 \cdot |\cdots| - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot |\cdots| = -10 + 18 = 8$$

Gyorsabb, ha előbb csinálunk egy sortranszformációt, és csak utána fejtünk ki:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{s_3 - 3s_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot (-1 - 12 - 12 + 4 + 4 + 9) = (-1) \cdot (-8) = 8$$

Néhány tétel

- $\det(\mathbf{A}) = \det\left(\mathbf{A}^\top\right)$
- $\mathbf{A}$ $n \times n$-es mátrixra $\det \mathbf{A} \neq 0 \Leftrightarrow r(\mathbf{A}) = n$ (rang maximális).
- $\mathbf{A}$ $m \times k$-as mátrix rangja a benne levő legnagyobb méretű nem nulla aldeterminúns mérete.
- $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ugyanakkora négyzetes mátrixokra: $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$.
- $\mathbf{A}$ pontosan akkor invertálható, ha $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

$$1 = \det(\mathbf{E}_n) = \det\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\right) = \det(\mathbf{A}) \det\left(\mathbf{A}^{-1}\right)$$

Inverz mátrix

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \left((-1)^{i+j} A_{ji}\right)_{i,j=1}^{n}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Determináns kiszámolása:

   $$\det \mathbf{A} = 1\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot(-1)\cdot(-2) + 0\cdot 1\cdot 0 - 0\cdot 3\cdot(-2) - 2\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot(-1)\cdot 0 = 5$$

2. Aldeterminánsok kiszámolása:

   $$(A_{ij})_{i,j=1}^{n} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. A kapott mátrixot transzponáljuk:

   $$(A_{ji})_{i,j=1}^{n} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

4. A kapott mátrixot sakktábla-szabály szerint szorozzuk:

   $$\left((-1)^{i+j} A_{ji}\right)_{i,j=1}^{n} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Végül leosztjuk a determinánssal:

   $$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

2×2-es mátrix inverze

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

1. determináns: $\det \mathbf{A} = ad - bc$
2. aldeterminánsok mátrixa: $\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$
3. transzponálás: $\begin{bmatrix} d & b \\ c & a \end{bmatrix}$
4. sakktábla: $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
5. determinánssal osztás:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Példa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}3 \end{bmatrix}$$

Cramer-szabály

- ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen
- a megoldás egyértelmű ($\mathbf{A}$ rangja maximális: determinánsa nem 0)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}, \dots$$

A k-adik ismeretlen kifejezésében az együtthatómátrix k-adik oszlopát kicseréljük a $\mathbf{b}$ oszlopvektorra.

Cramer-szabály – példa

$$\begin{array}{rcl} x + 2y & = & 4 \\ x + 3y - z & = & 6 \\ -2x + z & = & -5 \end{array} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = 3 + 4 + 0 - 0 - 2 - 0 = 5$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{12 + 10 + 0 - 0 - 12 - 0}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{6 + 8 + 0 - 0 - 4 - 5}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-15 + (-24) + 0 - (-24) - (-10) - 0}{5} = \frac{-5}{5} = -1$$

Vektorok szorzása

Vegyes szorzat:

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$
$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok vegyes szorzata a $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ determináns.
$\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$

Vektoriális szorzat (utolsó sor szerinti kifejtés):

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1 \cdot (a_2 b_3 - a_3 b_2) - \mathbf{e}_2 \cdot (a_1 b_3 - a_3 b_1) + \mathbf{e}_3 \cdot (a_1 b_2 - a_2 b_1) =$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Sor- és oszlopműveletek

Sor- és oszlopműveletek használhatóak:

- egyenletrendszer megoldása (csak sorműveletek!)
- inverz számolása (első módszer) (csak sorműveletek!)
- mátrixok rangjának meghatározása
- determináns kiszámítása
  - csere: (-1)-es szorzó
  - sor/oszlop szorzásánál ki kell emelni a szorzót