12. előadás

Többváltozós függvények

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2022. április 4.

Bevezetés

Egyváltozós függvény: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vagy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$).
Többváltozós függvény: $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
példa: vektor hossza: $(x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Többváltozós általában:
$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vagy $f\colon D_f \to \mathbb{R}^m$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}^n$).

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

$f_1, f_2, \dots, f_m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ komponens függvények

Példa:
$f(x, y) = (xy, x^2 + y^2, x^3 - 1)$
$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$f_1(x, y) = xy$
$f_2(x, y) = x^2 + y^2$
$f_3(x, y) = x^3 - 1$

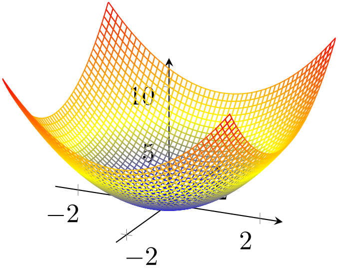
Szemléltetés

$n = 2$ és $m = 1$, azaz $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja $z = f(x, y)$, azaz

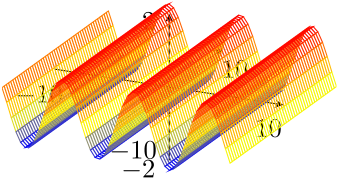
$$\{(x, y, f(x, y)) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Példák:

$f(x, y) = x^2 + y^2$ forgási paraboloid



$f(x, y) = \sin x$ „hullámpala”



Határérték

Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény határértéke az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ pontban a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ esetén $|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \varepsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Az f függvény folytonos az $\mathbf{a}$ pontban, ha $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

Példa:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

A függvényérték
- az x tengelyen: 0
- az y tengelyen: 0
- az $x = y$ egyenesen $\dfrac{x^2}{x^2+x^2} = \dfrac{1}{2}$

Így nincs határértéke az origóban.

Parciális deriválás

Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény az x_i változó szerint parciálisan deriválható az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ pontban, ha a

$$x_i \mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_m)$$

függvény deriválható $x_i = a_i$-ben.
A derivált értéke a parciális derivált.
Jelölés: $f'_{x_i}(\mathbf{a})$ vagy $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ vagy $\partial_i f(\mathbf{a})$, stb.

Példa:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3x^2 + 2x^2y + y^4 - 7 \\ f'_x(x,y) &= 3 \cdot 2x + 2y \cdot 2x = 6x + 4xy \\ f'_y(x,y) &= 0 + 2x^2 + 4y^3 = 2x^2 + 4y^3 \end{aligned}$$

Egy háromváltozós:

$$f(x,y,z) = 3x^2y - y^3z - xyz - 6x + 7y - 8$$

Parciális deriválás

Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény az x_i változó szerint parciálisan deriválható az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ pontban, ha a

$$x_i \mapsto f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_m)$$

függvény deriválható $x_i = a_i$-ben.
A derivált értéke a parciális derivált.
Jelölés: $f'_{x_i}(\mathbf{a})$ vagy $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ vagy $\partial_i f(\mathbf{a})$, stb.

Példa:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3x^2 + 2x^2y + y^4 - 7 \\ f'_x(x,y) &= 3 \cdot 2x + 2y \cdot 2x = 6x + 4xy \\ f'_y(x,y) &= 0 + 2x^2 + 4y^3 = 2x^2 + 4y^3 \end{aligned}$$

Egy háromváltozós:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= 3x^2y - y^3z - xyz - 6x + 7y - 8 \\ f'_x(x,y,z) &= 6xy - yz - 6 \\ f'_y(x,y,z) &= 3x^2 - 3y^2z - xz + 7 \\ f'_z(x,y,z) &= -y^3 - xy \end{aligned}$$

Magasabb rendű parciális deriváltak

Valamelyik parciális deriváltat még egyszer lederiváljuk:

$$f(x,y) = 3x^2 + 2x^2y + y^4 - 7$$

elsőrendű parciális deriváltak:

$$f'_x(x,y) = 6x + 4xy$$

$$f'_y(x,y) = 2x^2 + 4y^3$$

másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x,y) = 6 + 4y$$

$$f''_{xy}(x,y) = 4x$$

$$f''_{yx}(x,y) = 4x$$

$$f''_{yy}(x,y) = 12y^2$$

Young-tétel:
Ha a másodrendű parciális deriváltak léteznek és folytonosak, akkor

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y).$$

Érintősík egyenlete

Egy változó esetén az érintőegyenes egyenlete az x_0 pontban:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Két változóban érintősík egyenlete az (x_0, y_0) pontban:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Ez egy sík egyenlete:

$$-f'_x(x_0, y_0)x - f'_y(x_0, y_0)y + z = -f'_x(x_0, y_0)x_0 - f'_y(x_0, y_0)y_0 + f(x_0, y_0)$$

Példa:
Az $f(x, y) = x^2y^3 - 3y + 4$ függvény $(2, 1)$ pontbeli érintősíkjának egyenlete:

Érintősík egyenlete

Egy változó esetén az érintőegyenes egyenlete az x_0 pontban:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Két változóban érintősík egyenlete az (x_0, y_0) pontban:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Ez egy sík egyenlete:

$$-f'_x(x_0, y_0)x - f'_y(x_0, y_0)y + z = -f'_x(x_0, y_0)x_0 - f'_y(x_0, y_0)y_0 + f(x_0, y_0)$$

Példa:

Az $f(x, y) = x^2y^3 - 3y + 4$ függvény $(2, 1)$ pontbeli érintősíkjának egyenlete:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2y^3 - 3y + 4 & \qquad f(2,1) &= 5 \\ f'_x(x, y) &= 2xy^3 & f'_x(2,1) &= 4 \\ f'_y(x, y) &= 3x^2y^2 - 3 & f'_y(2,1) &= 9 \end{aligned}$$

Érintősík egyenlete:

$$z = 4(x - 2) + 9(y - 1) + 5$$

$$z = 4x + 9y - 12$$

Gradiens

Ha egy n változós $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely $P_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban az összes parciális deriváltja létezik, akkor az f függvény P_0-beli gradiense az az n dimenziós vektor, melynek koordiánátái a P_0-beli parciális deriváltak:

$$(f'_{x_1}(P_0), f'_{x_2}(P_0), \ldots, f'_{x_n}(P_0))$$

Jelölés: $\operatorname{grad} f(P_0)$ vagy $\nabla f(P_0)$ (nabla).

Példa:

$$f(x,y,z) = x^3y + 4z + 5 \qquad\qquad (2,1,3) \text{ pontban:}$$

Gradiens

Ha egy n változós $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely $P_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban az összes parciális deriváltja létezik, akkor az f függvény P_0-beli gradiense az az n dimenziós vektor, melynek koordiánátái a P_0-beli parciális deriváltak:

$$(f'_{x_1}(P_0), f'_{x_2}(P_0), \ldots, f'_{x_n}(P_0))$$

Jelölés: $\mathrm{grad} f(P_0)$ vagy $\nabla f(P_0)$ (nabla).

Példa:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^3y + 4z + 5 \\ f'_x(x,y,z) &= 3x^2y \\ f'_y(x,y,z) &= x^3 \\ f'_z(x,y,z) &= 4 \end{aligned}$$

$(2,1,3)$ pontban:

$$\begin{aligned} f'_x(2,1,3) &= 12 \\ f'_y(2,1,3) &= 8 \\ f'_z(2,1,3) &= 4 \end{aligned}$$

Tehát $\mathrm{grad} f(2,1,3) = (12,8,4)$.

Iránymenti derivált

Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény $P_0 \in \mathbb{R}^n$ pontbeli és $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor ($|\mathbf{e}| = 1$) irányú deriváltja (iránymenti deriváltja) a

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{|\overrightarrow{P_0P}|},$$

ahol a P pont úgy tart a P_0-hoz, hogy a $\overrightarrow{P_0P}$ vektor az $\mathbf{e}$-vel párhuzamos és egyállású.
Ezzel megegyező határérték:

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(P_0 + t\mathbf{e}) - f(P_0)}{t}$$

Jelölés: $f'_{\mathbf{e}}(P_0)$ vagy $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(P_0)$.

Tétel:
Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény iránymenti deriváltját általában kiszámolhatjuk a következő skaláris szorzat segítségével:

$$f'_{\mathbf{e}}(P_0) = \mathrm{grad} f(P_0) \cdot \mathbf{e}$$

Példa

$$f(x,y) = x^2y - xy^3 + 6x - 3 \qquad P_0(1,2)\text{pontban:}$$

$$f'_x(x,y) = 2xy - y^3 + 6 \qquad f'_x(1,2) = 2$$

$$f'_y(x,y) = x^2 - 3xy^2 \qquad f'_y(1,2) = -11$$

$\mathrm{grad} f(1,2) = (2,-11)$

A $(3,4)$ irányú derivált esetén az egységvektor: $\mathbf{e} = \dfrac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Az f függvény $\mathbf{e}$ irányú deriváltja a $P_0(1,2)$ pontban:

$$f'_{\mathbf{e}}(P_0) = (2,-11) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{6}{5} - \frac{44}{5} = -\frac{38}{5}$$

Iránymenti derivált minimuma/maximuma

$$f'_{\mathbf{e}}(P_0) = \mathrm{grad} f(P_0) \cdot \mathbf{e}$$

Az iránymenti derivált maximális, ha $\mathbf{e} = \dfrac{\mathrm{grad} f(P_0)}{|\mathrm{grad} f(P_0)|}$. Ekkor az iránymenti derivált értéke:

$$f'_{\mathbf{e}}(P_0) = \mathrm{grad} f(P_0) \cdot \mathbf{e} = \mathrm{grad} f(P_0) \cdot \frac{\mathrm{grad} f(P_0)}{|\mathrm{grad} f(P_0)|} = \frac{|\mathrm{grad} f(P_0)|^2}{|\mathrm{grad} f(P_0)|} = |\mathrm{grad} f(P_0)|$$

Az iránymenti derivált minimális, ha $\mathbf{e} = -\dfrac{\mathrm{grad} f(P_0)}{|\mathrm{grad} f(P_0)|}$. Ekkor az iránymenti derivált értéke:

$$f'_{\mathbf{e}}(P_0) = -|\mathrm{grad} f(P_0)|$$

Ha $\mathbf{e}$ merőleges $\mathrm{grad} f(P_0)$-re, akkor $f'_{\mathbf{e}}(P_0) = 0$.

Totális derivált

Emlékeztető:
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható x_0-ban, akkor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x - x_0) \cdot (x - x_0),$$

ahol $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban totálisan differenciálható, ha létezik $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix és $\varepsilon\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény, hogy

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad \text{és} \quad \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = \mathbf{0}.$$

Jelölés az $\mathbf{A}$ mátrixra: $f'(\mathbf{x}_0)$ vagy $\partial f(\mathbf{x}_0)$ vagy $Df(\mathbf{x}_0)$, stb.

A totális deriválhatóságnak szükséges feltétele, hogy a függvény komponensfüggvényei parciálisan deriválhatóak minden változó szerint az $\mathbf{x}_0$ helyen.
Az $\mathbf{A}$ mátrix a komponens függvények parciális deriváltjaiból áll (Jacobi-mátrix):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

Totális deriválhatóság elégséges feltétele

Ha az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény komponens függvényeinek parciális deriváltjai az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pont környezetében léteznek, és ezek folytonosak az $\mathbf{x}_0$-ban, akkor az f függvény az $\mathbf{x}_0$-ban totálisan deriválható.

Láncszabály

Emlékeztető:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

$g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n, f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,
g differenciálható $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^k$-ban és
f differenciálható $g(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^n$-ben,
akkor $f \circ g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ függvény differenciálható $\mathbf{x}_0$-ban, és

$$(f \circ g)'(\mathbf{x}_0) = f'(g(\mathbf{x}_0)) \cdot g'(\mathbf{x}_0)$$

Speciális eset: $k = 1, n = 2, m = 1$
$g(t) = (x(t), y(t))$ és $f(x, y)$

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(t) &= f(x(t), y(t)) \\
(f \circ g)'(t) &= \left[f'_x(x(t), y(t)) \;\; f'_y(x(t), y(t)) \right] \cdot \left[\begin{array}{c} x'(t) \\ y'(t) \end{array} \right] = \\
&= f'_x(x(t), y(t)) x'(t) + f'_y(x(t), y(t)) y'(t)
\end{aligned}$$