

14. előadás

Lokális szélsőértékek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2022. április 11.

Bevezetés

Egy $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pont egy **környezete** valamilyen $\varepsilon > 0$ -ra az \mathbf{x}_0 középpontú, ε sugarú gömb belseje: $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \varepsilon\}$.

Az $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek **lokális minimuma** van egy $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban, ha \mathbf{x}_0 -nak van egy olyan D környezete, hogy minden $\mathbf{x} \in D$ esetén $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$.

Az $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek **lokális maximuma** van egy $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban, ha \mathbf{x}_0 -nak van egy olyan D környezete, hogy minden $\mathbf{x} \in D$ esetén $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$.

Tétel (lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele):

Ha az $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban lokális szélsőértéke van, akkor \mathbf{x}_0 -ban az összes létező parciális deriváltja 0.

Az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pont az $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **stacionárius pontja**, ha itt a függvény összes parciális deriváltja 0.

Elégséges feltétel

Tétel (lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele):

Ha a $P_0(x_0, y_0)$ környezetében az $f(x, y)$ függvény második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0 \quad (\text{stacionárius pont})$$

és

$$f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0,$$

akkor lokális szélsőértéke van a függvénynek a $P_0(x_0, y_0)$ pontban.

Ha $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ($\Leftrightarrow f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$), akkor lokális minimuma van.

Ha $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ($\Leftrightarrow f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$), akkor lokális maximuma van.

Hesse-féle determináns:

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2$$

Nyeregpont

Tétel (nyeregpont):

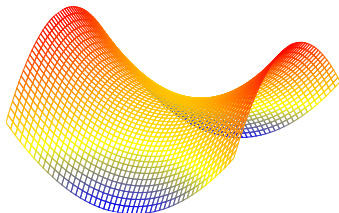
Ha a $P_0(x_0, y_0)$ környezetében az $f(x, y)$ függvény második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0 \quad (\text{stacionárius pont})$$

és

$$f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 < 0,$$

akkor a függvénynek nincs lokális szélsőértéke a $P_0(x_0, y_0)$ pontban (nyeregpont).



Példa

$$f(x, y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y)$$

Példa

$$f(x, y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y)$$

A parciális deriváltak:

$$f'_x(x, y) = (2x - 6)(y^2 - 4y)$$

$$f'_y(x, y) = (x^2 - 6x)(2y - 4)$$

Egy stacionárius pontban mindkettőnek el kell tűnnie. Ha az x szerinti 0:

$$(2x - 6)(y^2 - 4y) = 0$$

$$2x - 6 = 0$$

$$x = 3$$

$$y^2 - 4y = 0$$

$$(y - 4)y = 0$$

$$y = 4 \quad y = 0$$

Az y szerinti parciális deriváltból:

$$(x^2 - 6x)(2y - 4) = 0$$

Ha $x = 3$, akkor $y = 2$.

Ha $y = 4$ vagy $y = 0$, akkor $x = 0$ vagy $x = 6$.

Tehát a stacionárius pontok: $(3, 2)$, $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(6, 0)$, $(6, 4)$.

Példa folytatása

$$f'_x(x, y) = (2x - 6)(y^2 - 4y)$$

$$f'_y(x, y) = (x^2 - 6x)(2y - 4)$$

Számoljuk ki a másodrendű parciális deriváltakat:

$$f''_{xx}(x, y) = 2(y^2 - 4y)$$

$$f''_{xy}(x, y) = (2x - 6)(2y - 4)$$

$$f''_{yy}(x, y) = 2(x^2 - 6x)$$

A Hesse-féle determináns:

$$f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 = 2(y^2 - 4y) \cdot 2(x^2 - 6x) - (2x - 6)^2(2y - 4)^2$$

$$(3, 2) \quad 144 > 0 \quad \text{lokális szélsőérték}$$

$$(0, 0) \quad -576 < 0 \quad \text{nyeregpon}$$

A stacionárius pontok: $(0, 4) \quad -576 < 0 \quad \text{nyeregpon}$

$$(6, 0) \quad -576 < 0 \quad \text{nyeregpon}$$

$$(6, 4) \quad -576 < 0 \quad \text{nyeregpon}$$

Mivel $f''_{xx}(3, 2) = -8 < 0$, így a $(3, 2)$ pont lokális maximumhely.

A lokális maximum értéke: $f(3, 2) = 36$.

Feladat

$$f(x, y) = 1 + x + 4y - 3x^3 - 3y^3$$

Feladat

$$f(x, y) = 1 + x + 4y - 3x^3 - 3y^3$$

A parciális deriváltak:

$$f'_x(x, y) = 1 - 9x^2 \quad \Rightarrow 1 - 9x^2 = 0 \quad \Rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow x = \pm \frac{1}{3}$$

$$f'_y(x, y) = 4 - 9y^2 \quad \Rightarrow 4 - 9y^2 = 0 \quad \Rightarrow y^2 = \frac{4}{9} \quad \Rightarrow y = \pm \frac{2}{3}$$

A stacionárius pontok: $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.

A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x, y) = -18x \quad f''_{xy}(x, y) = 0 \quad f''_{yy}(x, y) = -18y$$

Hesse-féle determináns:

$$f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 = (-18x)(-18y) - 0^2 = 324xy$$

A stacionárius pontok:

$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	$72 > 0$	lokális maximum
$(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$	$-72 < 0$	nyeregpont
$(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	$-72 < 0$	nyeregpont
$(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$	$72 > 0$	lokális minimum

Szöveges feladat

Géza a pajtája falához egy 1 m^3 térfogatú felülről nyitott téglatest alakú szénatárolót szeretne építeni. A tároló egyik oldalát a pajta alkotja, csak a maradék három oldalát és az alját kell elkészítenie.

Hogyan méretezze a téglatestet, hogy a lehető legkevesebb anyagot kelljen felhasználnia?

Szöveges feladat

Géza a pajtája falához egy 1 m^3 térfogatú felülről nyitott téglatest alakú szénatárolót szeretne építeni. A tároló egyik oldalát a pajta alkotja, csak a maradék három oldalát és az alját kell elkészítenie.

Hogyan méretezze a téglatestet, hogy a lehető legkevesebb anyagot kelljen felhasználnia?

Legyenek az oldalhosszak a, b, c . Tudjuk, hogy a térfogata 1:

$$1 = abc \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{ab}$$

A felhasznált anyag: $ab + 2bc + ac$. Ezekből a minimalizálandó függvény:

$$f(a, b) = ab + \frac{2b}{ab} + \frac{a}{ab} = ab + \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$$

Szöveges feladat folytatás

$$f(a, b) = ab + \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$$

A parciális deriváltak:

$$f'_a(a, b) = b - \frac{2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad b - \frac{2}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 b = 2$$

$$f'_b(a, b) = a - \frac{1}{b^2} \quad \Rightarrow \quad a - \frac{1}{b^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad ab^2 = 1$$

Amiből $a^3 b^3 = 2$, azaz $ab = \sqrt[3]{2}$. Így

$$a = \frac{a^2 b}{ab} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = 2^{\frac{2}{3}} \quad b = \frac{ab^2}{ab} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 2^{-\frac{1}{3}}$$

Tehát egyetlen stacionárius pont a $(2^{\frac{2}{3}}, 2^{-\frac{1}{3}})$. A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{aa}(a, b) = \frac{4}{a^3} \quad f''_{ab}(a, b) = 1 \quad f''_{bb}(a, b) = \frac{2}{b^3}$$

Hesse-féle determináns:

$$f''_{aa}(a, b)f''_{bb}(a, b) - (f''_{ab}(a, b))^2 = \frac{4}{a^3} \frac{2}{b^3} - 1^2 = \frac{8}{a^3 b^3} - 1$$

Ennek az értéke a stacionárius pontban $3 > 0$, így ez lokális szélsőérték.

Mivel $f''_{aa}(2^{\frac{2}{3}}, 2^{-\frac{1}{3}}) > 0$, így lokális minimum. Ekkor $c = \frac{1}{ab} = 2^{-\frac{1}{3}}$.

Szöveges feladat második kérdése

Géza a pajtája falához egy 1 m^3 térfogatú felülről nyitott téglatest alakú szénatárolót szeretne építeni. A tároló egyik oldalát a pajta alkotja, csak a maradék három oldalát és az alját kell elkészítenie.

Hogyan méretezze a téglatestet, hogy a lehető legkevesebb anyagot kelljen felhasználnia?

Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a tároló alját a föld alkotja!

Szöveges feladat második kérdése

Géza a pajtája falához egy 1 m^3 térfogatú felülről nyitott téglatest alakú szénatárolót szeretne építeni. A tároló egyik oldalát a pajta alkotja, csak a maradék három oldalát és az alját kell elkészítenie.

Hogyan méretezze a téglatestet, hogy a lehető legkevesebb anyagot kelljen felhasználnia?

Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a tároló alját a föld alkotja!

Ekkor a függvényből kimarad az ab tag:

$$f(a, b) = \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$$

A parciális deriváltak:

$$f'_a(a, b) = -\frac{2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{a^2} = 0$$

$$f'_b(a, b) = -\frac{1}{b^2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{b^2} = 0$$

Nincs megoldás.

Magasabb dimenziós eset

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek a $P_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pontban a függvény második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá

$$f'_{x_1}(P_0) = f'_{x_2}(P_0) = \dots = f'_{x_n}(P_0) = 0 \quad (P_0 \text{ stacionárius pont})$$

és

$$f''_{x_1x_1}(P_0), \left| \begin{array}{cc} f''_{x_1x_1}(P_0) & f''_{x_1x_2}(P_0) \\ f''_{x_2x_1}(P_0) & f''_{x_2x_2}(P_0) \end{array} \right|, \dots, \left| \begin{array}{ccc} f''_{x_1x_1}(P_0) & \dots & f''_{x_1x_n}(P_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f''_{x_nx_1}(P_0) & \dots & f''_{x_nx_n}(P_0) \end{array} \right|$$

- ▶ mindegyike pozitív, akkor P_0 lokális minimum.
- ▶ váltakozó előjelű és $f''_{x_1x_1}(P_0) < 0$, akkor P_0 lokális maximum.