

# 15. előadás

## Feltételes szélsőérték

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2022. április 12.

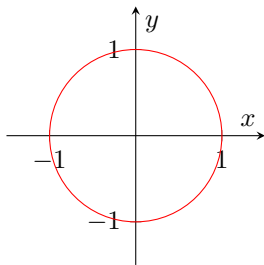
# Bevezető feladat

Határozzuk meg az  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y - 1$  függvény minimumát és maximumát az  $x^2 + y^2 = 1$  feltétel mellett.

Ha  $x^2 + y^2 = 1$ , akkor a függvény:

$$f(x, y) = 1 + 2y - 1 = 2y$$

Az  $x^2 + y^2 = 1$  feltételből az is következik, hogy  $-1 \leq y \leq 1$ , így a függvény minimuma  $-2$ , a függvény maximuma  $2$ .



## Feltételes szélsőérték:

Egy többváltozós  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvény szélsőértékeit keressük egy  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  függvény nullhelyein.

# Lagrange-függvény

Az  $f(x, y)$  függvény lokális szélsőértékeit keressük a  $g(x, y) = 0$  feltétel mellett. Ekkor tekintsük az

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

Lagrange-függvényt, ahol  $\lambda$  a **Lagrange-multiplikátor**.

Tétel (lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele):

Ha az  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  pontban lokális szélsőértéke van a  $g(x, y) = 0$  feltétel mellett, akkor a megfelelő pontban az  $F(x, y, \lambda)$  függvény mindhárom parciális deriváltja 0.

Megjegyzés:

$F'_\lambda(x, y, \lambda) = g(x, y)$  eltűnése pontosan a feltétel.

## Elégséges feltétel

Tétel (lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele):

Ha a  $P_0(x_0, y_0)$  környezetében az  $f(x, y)$  függvény második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá egy  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  hármasra

$$F'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = F'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = F'_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \quad (\text{stacionárius pont})$$

és

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} F''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{x\lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ F''_{yx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{y\lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ F''_{\lambda x}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{\lambda y}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{\lambda\lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} F''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & g'_x(x_0, y_0) \\ F''_{yx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) & g'_y(x_0, y_0) \\ g'_x(x_0, y_0) & g'_y(x_0, y_0) & 0 \end{vmatrix} = \\ & = 2F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0)g'_x(x_0, y_0)g'_y(x_0, y_0) - F''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0)g'_x(x_0, y_0)^2 - \\ & \quad - F''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0)g'_y(x_0, y_0)^2 \end{aligned}$$

- ▶ pozitív, akkor lokális maximuma van
- ▶ negatív, akkor lokális minimuma van

a  $P_0(x_0, y_0)$  pontban az  $f(x, y)$  függvénynek a  $g(x, y) = 0$  feltétel mellett.

## Példa

Keressük meg az  $f(x, y) = 6x + 8y - 10$  függvény szélsőértékeit az  $x^2 + y^2 = 25$  feltétel mellett!

A  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 25$ , és így

$$F(x, y, \lambda) = 6x + 8y - 10 + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

A parciális deriváltjai:

$$F'_x(x, y, \lambda) = 6 + \lambda \cdot 2x = 6 + 2\lambda x \quad \Rightarrow x = -\frac{6}{2\lambda} = -\frac{3}{\lambda}$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = 8 + \lambda \cdot 2y = 8 + 2\lambda y \quad \Rightarrow y = -\frac{8}{2\lambda} = -\frac{4}{\lambda}$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 25$$

Az utolsó egyenletbe helyettesítve:

$$\left(-\frac{3}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{4}{\lambda}\right)^2 = 25$$

$$\frac{25}{\lambda^2} = 25$$

$$\lambda = \pm 1$$

Így  $x = \mp 3$ , és  $y = \mp 4$ . Tehát a stacionárius pontok:  $(-3, -4, 1)$  és  $(3, 4, -1)$ .

## Példa folytatása

A másodrendű parciális deriváltak:

$$F'_x(x, y, \lambda) = 6 + 2\lambda x$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = 8 + 2\lambda y$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 25$$

$\Rightarrow$

$$F''_{xx}(x, y, \lambda) = 2\lambda$$

$$F''_{xy}(x, y, \lambda) = 0$$

$$F''_{yy}(x, y, \lambda) = 2\lambda$$

$$F''_{\lambda x}(x, y, \lambda) = 2x$$

$$F''_{\lambda y}(x, y, \lambda) = 2y$$

Így a Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = -8x^2\lambda - 8y^2\lambda,$$

ami a  $(-3, -4, 1)$  pontban negatív, így itt lokális minimum van,  
míg a  $(3, 4, -1)$  pontban pozitív, így itt lokális maximum van.

Az adott feltétel mellett a függvény

(lokális) minimuma:  $f(-3, -4) = -60$ ,

(lokális) maximuma:  $f(3, 4) = 40$ .

# Feladat

Mennyi a maximuma  $xy$ -nak, ha  $x + y = 10$ ?

# Feladat

Mennyi a maximuma  $xy$ -nak, ha  $x + y = 10$ ?

$$f(x, y) = xy$$

$$g(x, y) = x + y - 10$$

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 10)$$

A parciális deriváltak:

$$F'_x(x, y, \lambda) = y + \lambda \quad \Rightarrow y = -\lambda$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = x + \lambda \quad \Rightarrow x = -\lambda$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 10 \quad \Rightarrow -\lambda + (-\lambda) - 10 = 0$$

$\lambda = -5$ , és így  $x = y = 5$ . Azaz egyetlen stacionárius pont van:  $(5, 5, -5)$ .

Hesse-féle determináns:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

Tehát az  $(5, 5)$  pont lokális maximumhelye a függvénynek az adott feltétel mellett. A maximum értéke:  $f(5, 5) = 25$ .



## Szélsőérték keresése korlátos és zárt tartományon

Az  $f(x, y)$  függvény (abszolút) minimumát és maximumát keressük a  $\{(x, y) \mid g(x, y) \geq 0\}$  tartományon.

Először megkeressük az  $f$  függvény lokális szélsőértékeit, melyek közül csak a tartományba esőket vesszük figyelembe.

Majd az  $f$  függvény szélsőértékeit megkeressük a  $g(x, y) = 0$  feltétel mellett a Lagrange-függvénnyel.

A kapott eredményekből megállapítjuk az abszolút minimumot és maximumot.

## Példa

Keressük meg az  $f(x, y) = x^2 - x + y^2$  függvény szélsőértékeit az egységkörlapon ( $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ).

Először lokális szélsőértékeket keresünk. Ehhez a parciális deriváltak:

$$f'_x(x, y) = 2x - 1$$

$$f'_y(x, y) = 2y$$

Egyetlen stacionárius pont van:  $(\frac{1}{2}, 0)$ , mely a megadott tartományba esik.  
A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x, y) = 2$$

$$f''_{xy}(x, y) = 0$$

$$f''_{yy}(x, y) = 2$$

A Hesse-determináns:  $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ , tehát az  $(\frac{1}{2}, 0)$  lokális szélsőérték, mégpedig lokális minimum ( $2 > 0$ ).

A lokális minimum értéke:  $f(\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$ .

## Példa folytatása

$$f(x, y) = x^2 - x + y^2$$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$F(x, y, \lambda) = x^2 - x + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

A parciális deriváltak:

$$F'_x(x, y, \lambda) = 2x - 1 + \lambda 2x$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = 2y + \lambda 2y$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 1$$

Ha  $F'_y(x, y, \lambda)$  eltűnik, akkor  $y = 0$  vagy  $\lambda = -1$ , viszont az utóbbi esetben  $F'_x(x, y, \lambda) = -1$ . Tehát  $y = 0$  és a harmadik egyenletből  $x = \pm 1$ . A stacionárius pontok:  $(1, 0, -\frac{1}{2})$ ,  $(-1, 0, -\frac{3}{2})$ . A Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 2 + 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2 + 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = -(2x)^2(2 + 2\lambda) - (2y)^2(2 + 2\lambda) = -8(1 + \lambda)(x^2 + y^2)$$

A  $(1, 0, -\frac{1}{2})$  lokális minimumhely, értéke:  $f(1, 0) = 0$ .

A  $(-1, 0, -\frac{3}{2})$  lokális maximumhely, értéke:  $f(-1, 0) = 2$ .

A függvény abszolút minimuma  $-\frac{1}{4}$ , míg abszolút maximuma 2.

## Egy feladat

Keressük meg az  $f(x, y) = x^3y^5$  függvény lokális szélsőértékeit.

## Egy feladat

Keressük meg az  $f(x, y) = x^3y^5$  függvény lokális szélsőértékeit.

A parciális deriváltak:

$$f'_x(x, y) = 3x^2y^5$$

$$f'_y(x, y) = 5x^3y^4$$

Ha  $x$  vagy  $y$  nulla, akkor mindkettő eltűnik (másutt nem), tehát a két tengely összes pontja stacionárius pont.

Számoljuk ki a másodrendű parciális deriváltakat:

$$f''_{xx}(x, y) = 6xy^5$$

$$f''_{xy}(x, y) = 15x^2y^4$$

$$f''_{yy}(x, y) = 20x^3y^3$$

A Hesse-féle determináns:

$$f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 = 6xy^5 \cdot 20x^3y^3 - (15x^2y^4)^2 = -105x^4y^8,$$

mely az összes stacionárius pontban nulla.

A függvény az első és harmadik síknegyedben pozitív, a második és negyedik síknegyedben negatív, így nincs lokális szélsőértéke.

## Egy feladat második kérdése

Keressük meg az  $f(x, y) = x^3y^5$  függvény lokális szélsőértékeit.

Keressük meg  $f$  minimumát és maximumát az  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  csúcsú háromszöglapon!

## Egy feladat második kérdése

Keressük meg az  $f(x, y) = x^3y^5$  függvény lokális szélsőértékeit.

Keressük meg  $f$  minimumát és maximumát az  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  csúcsú háromszöglapon!

Mivel a függvénynek nincs lokális szélsőértéke, így a minimum és a maximum a határon lesz. A tengelyeken a függvény nulla, a háromszöglapon másutt pozitív, így a minimuma 0. A maximuma a  $(0, 1)$  és  $(1, 0)$  közötti szakaszon lesz. Ezt paraméterezhetjük  $\{(x, 1 - x) \mid x \in [0, 1]\}$  alakban, és ekkor a függvény:

$$g(x) = f(x, 1 - x) = x^3(1 - x)^5,$$

melynek maximuma  $g'(x) = 0$  esetén lehet. A deriváltja:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2(1 - x)^5 + x^3 \cdot 5(1 - x)^4(-1) = 3x^2(1 - x)^5 - 5x^3(1 - x)^4 = \\ &= (3(1 - x) - 5x)x^2(1 - x)^4 = (3 - 8x)x^2(1 - x)^4, \end{aligned}$$

mely  $x = \frac{3}{8}$  esetén tűnik el. Ez lokális maximum, mert előtte pozitív, utána negatív a  $g'(x)$ . Az ennek megfelelő  $(\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$  pontban van az  $f$  függvény maximuma, melynek értéke:  $f(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}) = \frac{3^3 \cdot 5^5}{8^8} = \frac{84375}{16777216} \approx 0,00503$ .

A háromszöglapon a függvény minimuma 0, maximuma kb. 0,00503.